Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. Kh. Beshtokov, Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, Volume 30, Issue 2, 158–175

DOI: <https://doi.org/10.35634/vm200202>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.92.164.108

April 26, 2023, 05:17:28

УДК 519.63

© М. Х. Бештоков

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО
УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ
БЕССЕЛЯ И РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

Работа посвящена построению приближенных решений краевых задач в прямоугольнике для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя, выступающих в качестве математических моделей движения влаги и солей в почвах с фрактальной организацией. Построены разностные схемы для дифференциальных задач. Методом энергетических неравенств выведены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность, устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации. Построен алгоритм численного решения разностных схем, полученных при аппроксимации краевых задач для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные в работе теоретические выкладки.

Ключевые слова: краевые задачи, априорная оценка, нагруженные уравнения, разностная схема, псевдопараболическое уравнение, уравнение влагопереноса, уравнение Аллера, дробная производная Капуто.

DOI: [10.355634/vm200202](https://doi.org/10.355634/vm200202)

В настоящее время проявляется повышенный рост внимания исследователей к фрактальному анализу, дробному исчислению, а также развитию методов решения начально-краевых задач для уравнений, выступающих в качестве математических моделей процессов переноса в средах с фрактальной структурой [1–5].

Существуют различные определения фрактала [3, с. 194], [6, с. 15]. Более физическим и наглядным является определение Б. Мандельброта — определения фрактала как структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому, образно говоря, выглядят одинаково, в каком бы масштабе ее ни наблюдать.

В основе математических моделей процессов фильтрации в пористых средах с фрактальной организацией и памятью лежат дифференциальные уравнения дробного порядка как по временной, так и по пространственной переменной и их разностные аналоги. Сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт, образуют эффективное поровое пространство, которое является примером системы, близкой к фрактальной. Одной из важнейших характеристик почв, оказывающих влияние практически на все почвенные свойства, является их влажность. Зависимость фрактальной размерности почвы от влажности существенно может повлиять на процесс нестационарного движения влаги в этой капиллярно-пористой среде.

Хорошо известно, что решение многих практически важных задач, возникающих при исследовании процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [7], движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах [8], переноса влаги [9, 10], тепла [11] и солей [12] в пористых средах, связано с необходимостью исследования краевых задач для псевдопараболического уравнения

$$u_t = (k(x, t)u_x)_x + (\eta(x, t)u_x)_{xt} + r(x, t)u_x - q(x, t)u(x, t) + f(x, t).$$

Нагруженными дифференциальными уравнениями называются уравнения, содержащие функции от решения на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают при изучении движения подземных вод, в задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоем поступает из n источников загрязняющее вещество определенной интенсивности, при построении математической модели переноса дисперсных загрязнений в пограничном слое атмосферы.

Краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений рассматривались в [13]. Задачи расчета тепломассообмена с сосредоточенными источниками (стоками) переносимой субстанции [14] и, подобно [15, 16], задачи регулирования уровня грунтовых вод при орошении приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных псевдопараболических уравнений.

Так, в работе [17] исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка. С помощью метода Римана доказаны существование и единственность классического решения исследуемой задачи.

Численным методам решения некоторых нагруженных дифференциальных уравнений посвящены работы [18–23].

В работе [18] методом конечных разностей исследуются краевые задачи для нагруженных обыкновенных и с частными производными дифференциальных уравнений.

Работа [19] посвящена численному решению нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными. Рассмотрена краевая задача относительно параболического уравнения с различными вариантами точечного нагружения. Применением методов разностной аппроксимации рассматриваемые задачи приводятся к системам алгебраических уравнений специальной структуры, для решения которых предлагается параметрическое представление, использующее решения вспомогательных линейных систем с трехдиагональными матрицами.

В работе [20] предложена компактная трехслойная разностная схема повышенного порядка аппроксимации для решения интегро-дифференциального уравнения диффузии, доказаны устойчивость и сходимость компактной схемы. Для подтверждения теоретических результатов проведены численные расчеты.

В работах автора [21–23] рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Для решения поставленных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [24–31].

Так, в работе [24] получены результаты, позволяющие применять метод энергетических неравенств для получения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках, как и в классическом случае ($\alpha = 1$).

В [25] построен новый разностный аналог (называемая формулой $L_2 - 1_\sigma$), обеспечивающий порядок аппроксимации дробной производной Капуто $O(\tau^{3-\alpha})$. Доказаны устойчивость предлагаемых схем, а также их сходимость в L_2 -норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

В [26, 27] рассматриваются краевые задачи для псевдопараболических уравнений дробного порядка. Для решения поставленных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках. Для каждой из рассмотренных задач доказана сходи-

мость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи. Для одной краевой задачи построен алгоритм численного решения.

В [28] построен разностный аналог дробной производной дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти (аналог формулы L1). Исследованы основные свойства этого разностного оператора, на его основе построены разностные схемы второго и четвертого порядков аппроксимации по пространственной переменной и дробного порядка $2 - \alpha_0$ по временной переменной. Доказаны устойчивость предложенных разностных схем, а также их сходимость в сеточной L_2 -норме со скоростью, равной порядку погрешности аппроксимации.

Работы [29–31] посвящены исследованию различных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка с эффектом запаздывания по времени. В физическом аспекте понятия «память», «последствие», «запаздывание», «наследственность» считаются очень близкими.

В работе [32] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат дифференциальные уравнения Аллера с дробной по времени производной.

В настоящей работе исследуются краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя, выступающие в качестве математических моделей движения влаги и солей в почвах с фрактальной организацией. Неклассичность рассматриваемых задач заключается в том, что вместо первой производной по времени нагруженное уравнение содержит производную дробного порядка в смысле Капуто, а вместо второй производной по пространственной переменной — сингулярный дифференциальный оператор второго порядка с переменными коэффициентами, обобщающий оператор Бесселя. Оба неклассических направления (и уравнения дробного порядка, и уравнения с особенностями типа оператора Бесселя) актуальны в силу обилия разнообразных приложений, в которых возникают такие неклассические объекты. Методом энергетических неравенств выведены априорные оценки решений рассматриваемых задач в дифференциальной и разностной трактовках. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Разностным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений с оператором Бесселя посвящены работы [33–35]. Настоящая работа является непосредственным продолжением этой серии работ.

§ 1. Постановка краевой задачи с условием первого рода

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим краевую задачу для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя:

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^m} \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u(x_0, t) + f(x, t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \Pi(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.4)$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x, t), \eta(x) \leq c_1, |r(x, t), r_x(x, t), k_x(x, t), q(x, t)| \leq c_2, 0 \leq m \leq 2, \quad (1.5)$$

$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$ — дробная производная в смысле Капуто порядка α , где $0 < \alpha < 1$, c_i , $i = 0, 1, 2$, — положительные числа, $\Pi(x, t) = ku_x + \partial_{0t}^\alpha(\eta(x)u_x)$.

В случае когда $\alpha = 1$, различные краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с оператором Бесселя изучались в работах [33, 34].

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0, t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (1.2), равносильному в свою очередь тождеству $\Pi(x, t) = 0$ [36, с. 173], если функции $r(0, t)$, $k(0, t)$, $q(0, t)$, $f(0, t)$ конечны.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i , $i = 1, 2, \dots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

§ 2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1.1)–(1.4) в дифференциальной форме введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(u, v) = \int_0^l uv \, dx, \quad \|u\|_0^2 = (u, u), \quad \text{где } u, v \text{ — заданные на } [0, l] \text{ функции.}$$

Умножим уравнение (1.1) скалярно на $x^m u$:

$$\begin{aligned} (\partial_{0t}^\alpha u, x^m u) &= ((x^m k u_x)_x, u) + (\partial_{0t}^\alpha (x^m \eta u_x)_x, u) + \\ &+ (r u_x, x^m u) - (q u(x_0, t), x^m u) + (f, x^m u). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Преобразуя интегралы, входящие в тождество (2.1), пользуясь неравенством Коши с ε и леммой 1 [24], после несложных преобразований, с учетом

$$\begin{aligned} -(q u(x_0, t), x^m u) &= - \int_0^l x^m q u(x_0, t) u \, dx = -u(x_0, t) \int_0^l x^m q u \, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} u^2(x_0, t) + \frac{1}{2} \left(\int_0^l x^m q u \, dx \right)^2 \leq M_1 \left(\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \right), \end{aligned}$$

из (2.1) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} u_x)^2 \, dx + \int_0^l x^m k u_x^2 \, dx &\leq \\ &\leq x^m u \Pi(x, t)|_0^l + M_2 \left(\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \right) + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учитывая условия (1.2), (1.3), из (2.2) находим

$$\partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} u_x)^2 \, dx + \int_0^l x^m k u_x^2 \, dx \leq M_3 \|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_4 \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \quad (2.3)$$

Тогда, применяя к обеим частям (2.3) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} & \|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq \\ & \leq M_5 D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6 \left(D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2$.

С помощью леммы 2 [24] из (2.4) получаем следующую априорную оценку:

$$\|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \quad (2.5)$$

где M — положительная постоянная, зависящая только от входных данных задачи (1.1)–(1.4),

$D_{0t}^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$.

Теорема 1. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0, l]$, $r(x, t)$, $q(x, t)$, $f(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(Q_T)$ и выполнены условия (1.5), тогда для решения $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.4) справедлива априорная оценка (2.5).

Из априорной оценки (2.5) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

§ 3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(\frac{h^2 + \tau^2}{x}\right)$:

$$\begin{aligned} \overline{\kappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i &= \frac{\kappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{1}{x_i^m} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{\overline{x},i} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} \right) + \\ &+ \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\kappa_0 a_1 y_{(x,0)}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(\gamma_1 y_{x,0} \right) = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + d_0 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right) - \mu, \quad x = 0, \quad (3.2)$$

$$y_N^{(\sigma)} = 0, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad x = l, \quad (3.3)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (3.4)$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ (формула $L2 - 1_\sigma$), обеспечивающий высокий порядок аппроксимации $O(\tau^{3-\alpha})$ [25], нежели чем разностный аналог, известный под названием формула $L1$.

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = \left(l + \sigma \right)^{1-\alpha} - \left(l - 1 + \sigma \right)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1, \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha} \left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha} \right] - \frac{1}{2} \left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha} \right], \quad l \geq 1,$$

$$\text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha, \sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha, \sigma)} + b_1^{(\alpha, \sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha, \sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha, \sigma)} - b_s^{(\alpha, \sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha, \sigma)} - b_j^{(\alpha, \sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha, \sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0.5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{\overline{\kappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, \quad r_N = r(l, t) = r_N^{j+\sigma} \geq 0, \quad r = r^+ + r^-, \quad r_0 = r(0, t) = r_0^{j+\sigma} \leq 0,$$

$$\overline{\kappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad r^+ = 0.5(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = 0.5(r - |r|) \leq 0,$$

$$d_i^j = \begin{cases} \overline{\kappa}_i q_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ q_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \quad \varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\kappa}_i f_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ f_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = 0, \\ h, & i \neq 0, N, \end{cases}$$

$$\kappa_i = \frac{1}{1 + R_i}, \quad R_i = \frac{0.5h|r_i|\overline{\kappa}_i}{k_{i-0.5}}, \quad \kappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}}, \quad r_0 \leq 0, \quad |r| = r^+ - r^-,$$

$$\mu = \frac{0.5h}{m+1}\varphi_0, \quad Y = \widehat{y} + y, \quad \widehat{y} = y^{j+1}, \quad y_t = \frac{\widehat{y} - y}{\tau}, \quad y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad t^* = t^{j+\sigma},$$

$$x_{i_0}^- = \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h}, \quad x_{i_0}^+ = \frac{x_0 - x_{i_0}}{h}, \quad x_{i_0} \leq x_0 \leq x_{i_0+1}.$$

Для численного решения разностной схемы (3.1)–(3.4), полученной при аппроксимации задачи (1.1)–(1.4), удобно использовать метод параметрической прогонки [37, с. 131].

Введем скалярные произведения и норму:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad \|u\|_1^2 = (1, u^2), \quad \|u_{\overline{x}}\|_0^2 = (1, u_{\overline{x}}^2), \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2 \hbar = (1, u^2).$$

Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (3.1) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$:

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\kappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\kappa(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)} \right) + \\ & + \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{\overline{x}, i}), y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{-j} x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x}, i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) + \\ & + \left(b^{+j} x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x, i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) - \left(d_i^{(\sigma)} (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), x^m y^{(\sigma)} \right) + \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Оценивая суммы, входящие в (3.5), с учетом леммы 1 [25] после несложных преобразований из (3.5) находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2 \right) + \left(x_{i-0.5}^m \frac{\gamma_i}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y_{\overline{x}})^2 \right) + \frac{1}{1 + hM_2} \left(x_{i-0.5}^m a \kappa, (y_{\overline{x}}^{(\sigma)})^2 \right) \leq \\ & \leq x_{i-0.5}^m y^{(\sigma)} \left[\kappa a_i y_{\overline{x}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\overline{x}}) \right] \Big|_0^N - (x_{i-0.5}^m a \kappa_{\overline{x}}, y_{\overline{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + \\ & + \left(b^{-j} (x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x}}^{(\sigma)}), y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{+j} (x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_x^{(\sigma)}), y^{(\sigma)} \right) + \\ & + M_4 \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + \|x_{i-0.5}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right) + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_1^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Преобразуем второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (3.6), тогда получим

$$\begin{aligned} & - \left(x_{i-0.5}^m a \kappa_{\overline{x}}, y_{\overline{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{-j} (x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x}}^{(\sigma)}), y^{(\sigma)} \right) + \\ & + \left(b^{+j} (x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_x^{(\sigma)}), y^{(\sigma)} \right) \leq M_5 \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + \|x_{i-0.5}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Преобразуем первое выражение в правой части (3.6):

$$\begin{aligned}
 & x_{i-0.5}^m y^{(\sigma)} \left[\kappa a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}}) \right] \Big|_0^N = \\
 & = -x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + d_0 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right) - \mu \right] = \\
 & = -\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m d_0 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) y_0^{(\sigma)} + x_{0.5}^m \mu y_0^{(\sigma)} \leq \\
 & \leq -\frac{1}{2} \frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0)^2 + M_6 \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + \|x_{i-0.5}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)})^2 \right) + \mu^2.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Учитывая (3.7), (3.8), из (3.6) получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2 \right) + \left(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x_{i-0.5}^m y_{\bar{x}})^2 \right) + \\
 & + \frac{h}{4(m+1)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0)^2 + M_5 \|x^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq \\
 & \leq M_6 \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)})^2 \right) + M_7 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_1^2 + \mu^2 \right).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.9) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_2^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_8 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_2^2 + M_9 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_1^2 + \mu^2 \right), \tag{3.10}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} y\|_2^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 + (x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0)^2$.

Перепишем (3.10) в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_2^2 \leq M_{10}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_2^2 + M_{11}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^j\|_2^2 + M_9 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_1^2 + \mu^2 \right). \tag{3.11}$$

На основании леммы 7 [26] из (3.11) получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_2^2 \leq M \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_2^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^{j'}\|_1^2 + \mu^2 \right) \right), \tag{3.12}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.5), тогда существуют такие h_0, τ_0 , что если $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (3.1)–(3.4) справедлива априорная оценка (3.12).

Из априорной оценки (3.12) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (3.1)–(3.4) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (3.1)–(3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в сеточной норме $\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_2^2$ со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$ [25] — так, что если существуют такие h_0, τ_0 , то при $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}} (y^{j+1} - u^{j+1})\|_2 \leq M \|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1 (h^2 + \tau^2) \leq \overline{M} (h^2 + \tau^2),$$

где $\overline{M}$ — положительное число, не зависящее от h и τ .

§ 4. Постановка краевой задачи с условием третьего рода и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим краевую задачу с условием третьего рода для уравнения (1.1). Для этого заменим условие (1.3) условием вида

$$-\Pi(l, t) = \beta(t)u(l, t) - \mu(t), \quad |\beta| \leq c_2. \quad (4.1)$$

Для получения априорной оценки решения умножим (1.1) скалярно на $x^m u$. Тогда из (2.1) после некоторых преобразований находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} u_x)^2 dx + \int_0^l x^m k u_x^2 dx \leq \\ & \leq x^m u \Pi(x, t)|_0^l + M_1 \left(\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \right) + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (4.2):

$$\begin{aligned} x^m u \Pi(x, t)|_0^l &= l^m u(l, t) \left(\mu(t) - \beta(t)u(l, t) \right) = l^m \mu(t)u(l, t) - l^m \beta(t)u^2(l, t) \leq \\ &\leq M_2 \left(\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \right) + \mu^2(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Учитывая (4.3), из (4.2) с учетом преобразований (2.3)–(2.5) находим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} (\|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \quad (4.4)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} u\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2$, M – положительное число, зависящее только от входных данных задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если $k(x, t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0, l]$, $r(x, t)$, $q(x, t)$, $f(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (1.5), (4.1), тогда для решения $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) справедлива априорная оценка (4.4).

Из априорной оценки (4.4) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

§ 5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(\frac{h^2 + \tau^2}{x}\right)$:

$$\begin{aligned} \overline{\kappa} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_i &= \frac{\kappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{1}{x_i^m} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \left(x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{x,i} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} \right) + \\ &+ \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \kappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \left(\gamma_1 y_{x,0} \right) &= \frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_0 + \beta_1 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) - \mu_1, \\ t \in \overline{\omega}_\tau, \quad x &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \left(\gamma y_{\bar{x}}\right)_N\right) = \\
& \tilde{\varkappa} \beta y_N^{(\sigma)} + 0.5h \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_N + \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\right) - \mu_2, \\
& x = N,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \tag{5.4}$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{0.5h}{m+1} d_0^j, \quad \beta_2 = 0.5h d_N^j, \quad \mu_1 = \frac{0.5h}{m+1} \varphi_0^j, \quad \mu_2 = \tilde{\varkappa} \mu^{j+\sigma} + 0.5h \varphi_N^j, \\
\tilde{\varkappa} &= 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1 - \frac{0.5hm}{l}}, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k_{0.5}^{j+\sigma}}}, \quad r_0^{j+\sigma} \leq 0, \quad \varkappa_N = \frac{1}{1 + 0.5h \frac{|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-0.5}^{j+\sigma}}}, \quad r_N^{j+\sigma} \geq 0.
\end{aligned}$$

Перепишем задачу (5.1)–(5.4) в операторной форме

$$\begin{cases} \bar{\varkappa} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y = \bar{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \bar{\delta} y + \bar{\Phi}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\varkappa} &= \begin{cases} \varkappa_i, & x \in \omega_h, \\ 1, & x = 0, l, \end{cases} \quad \bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad t^* = t^{j+1/2}, \\
\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y^{(\sigma)} &= \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) + \\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right) - d_i^j \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right), \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{(m+1) \left(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \beta_1 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right)}{0.5h}, & x = 0, \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = - \frac{\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \tilde{\varkappa} \beta y_N^{(\sigma)} + \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right)}{0.5h}, & x = l, \end{cases} \\
\bar{\delta}(t) y &= \begin{cases} \delta y_i = \frac{1}{x_i^m} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \left(x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{\bar{x},i} \right)_x, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \delta^- y_0 = \frac{m+1}{0.5h} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \left(\gamma_1 y_{x,0} \right), & x = 0, \\ \delta^+ y_N = - \frac{1}{0.5h} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \left(\gamma_N y_{\bar{x},N} \right), & x = l, \end{cases} \quad \bar{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \frac{(m+1)}{0.5h} \mu_1, & x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{1}{0.5h} \mu_2, & x = l. \end{cases}
\end{aligned}$$

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i \hbar, \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2 \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, & i = N, \\ h, & i \neq N. \end{cases}$$

Умножим (5.5) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\left(\overline{\kappa} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) + \left(\overline{\delta} y, x^m y^{(\sigma)} \right) + \left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)} \right). \quad (5.6)$$

После некоторых несложных преобразований из (5.6) получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\overline{\kappa}}{2}, \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2 \right) + \left(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}})^2 \right) + \frac{1}{1+hM_1} \left(\overline{x}^m a_i \kappa, (y_{\overline{x}}^{(\sigma)})^2 \right) \leq \\ & \leq M_2 \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \right) - \left(d \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right), x_i^m y^{(\sigma)} \right) + \\ & + \left(\overline{x}_N^m - x_N^m \right) y_N^{(\sigma)} \left(\kappa_N a_N y_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (\gamma_N y_{\overline{x},N}) \right) - \\ & - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left(\kappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (\gamma_1 y_{x,0}) \right) + \\ & + \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right) + y_N^{(\sigma)} x_N^m \left(\mu_2 - \tilde{\kappa} \beta y_N^{(\sigma)} - \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Преобразуем третье, четвертое и шестое слагаемые в правой части (5.7) с учетом (5.2), (5.3)

$$\begin{aligned} & \left(\overline{x}_N^m - x_N^m \right) y_N^{(\sigma)} \left(\kappa_N a_N y_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (\gamma_N y_{\overline{x},N}) \right) - \\ & - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left(\kappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha (\gamma_1 y_{x,0}) \right) + \\ & + x_N^m y_N^{(\sigma)} \left(\mu_2 - \tilde{\kappa} \beta y_N^{(\sigma)} - \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right) = \\ & = \left(\overline{x}_N^m - x_N^m \right) y_N^{(\sigma)} \left[\mu_2 - \tilde{\kappa} \beta y_N^{(\sigma)} - \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) - 0.5h \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_N \right] + \\ & + x_N^m y_N^{(\sigma)} \left[\mu_2 - \tilde{\kappa} \beta y_N^{(\sigma)} - \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right] - \\ & - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\beta_1 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) + \frac{0.5h}{m+1} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_0 - \mu_1 \right] = \\ & = y_N^{(\sigma)} \overline{x}_N^m \left[\mu_2 - \tilde{\kappa} \beta y_N^{(\sigma)} - \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right] - \\ & - 0.5h y_N^{(\sigma)} (\overline{x}_N^m - x_N^m) \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_N - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\beta_1 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) - \mu_1 \right] - \\ & - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_0 \leq \\ & \leq \overline{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} - \overline{x}_N^m y_N^{(\sigma)} \left(\tilde{\kappa} \beta y_N^{(\sigma)} + \beta_2 \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right) - \\ & - \beta_1 x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) + x_{0.5}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} - \\ & - \frac{h}{4} (\overline{x}_N^m - x_N^m) \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_N^2 - \frac{h}{4(m+1)} x_{0.5}^m \Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha y_0^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Учитывая (5.8), из (5.7) после некоторых преобразований находим

$$\Delta_{0t_j+\sigma}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_6 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_7 \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right), \quad (5.9)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 + \|\overline{x}^{\frac{m}{2}} y_{\overline{x}}\|_0^2 + (x_{0.5}^m y_0)^2$.

С помощью леммы 7 [26] из (5.9) получаем априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 \leq M \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^{j'}\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \right), \quad (5.10)$$

где M — положительное число, не зависящее от h и τ .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.5), (4.1), тогда существуют такие h_0, τ_0 , что если $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (5.1)–(5.4) справедлива априорная оценка (5.10).

Из априорной оценки (5.10) следуют единственность и решения разностной схемы (5.1)–(5.4) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (5.1)–(5.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) в сеточной норме $\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_1^2$ со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$ [25] — так, что если существуют такие τ_0, h_0 , то при $\tau \leq \tau_0, h \leq h_0$, справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}} (y^{j+1} - u^{j+1})\|_1 \leq \overline{M} (h^2 + \tau^2),$$

где $\overline{M}$ — положительное число, не зависящее от h и τ .

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u = & \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^m} \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \\ & - \sum_{s=1}^p q_s(x, t) u(x_s, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

если потребовать выполнения условия $|q_s| \leq c_2$.

§ 6. Результаты численного эксперимента

Рассмотрим следующий тестовый пример:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u = & \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^m} \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m \eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t) u(x_0, t) + f(x, t), \\ & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} x^m \Pi(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ & -\Pi(l, t) = \beta(t) u(l, t) - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ & u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k(x, t) = e^{x+t}, \quad \eta(x) = e^x, \quad r(x, t) = (x - 0.5) \cos(x + t), \quad q(x, t) = xt^2, \\ \beta(t) = \frac{e^{(l+t)}}{l}, \quad \mu(t) = 5e^{(l+t)} t^3 l^3 + 4e^l l^3 \left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} \right), \\ f(x, t) = \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} x^4 - 4t^3 e^{x+t} (x^3 + 3x^2) + xt^5 x_0^4 - 4e^x (x^3 + 3x^2) \left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} \right) - \\ - 4(x - 0.5) \cos(x + t) t^3 x^3 - 4mt^3 e^{x+t} x^2 - 4me^x x^2 \left(\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + \frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} \right), \\ u_0(x) = 0, \quad l = 1, \quad T = 1. \end{aligned}$$

Точное решение задачи $u(x, t) = t^3 x^4$.

Ниже в таблице при различных значениях $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$, $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$, $m = 2$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле: $\text{ПС} = \log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{\|z_1\|_0}{\|z_2\|_0}$, где z_i — это погрешность, соответствующая h_i .

Таблица

α	x_0	h	$\max_{0 \leq j \leq j_0} \ z^j\ _0$	ПС в $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.01	0.1	$\frac{1}{100}$	2.3289e-4		4.0169e-4	
		$\frac{1}{200}$	5.7829e-5	2.0098	1.0003e-4	2.0056
		$\frac{1}{400}$	1.4407e-5	2.0049	2.4958e-5	2.0029
		$\frac{1}{800}$	3.5958e-6	2.0025	6.2333e-6	2.0014
	0.5	$\frac{1}{100}$	2.3103e-4		4.0002e-4	
		$\frac{1}{200}$	5.7366e-5	2.0098	9.9612e-5	2.0057
		$\frac{1}{400}$	1.4292e-5	2.0050	2.4853e-5	2.0029
		$\frac{1}{800}$	3.5669e-6	2.0025	6.2071e-6	2.0014
	0.9	$\frac{1}{100}$	2.2584e-4		3.9531e-4	
		$\frac{1}{200}$	5.6070e-5	2.0100	9.8436e-5	2.0057
		$\frac{1}{400}$	1.3968e-5	2.0051	2.4559e-5	2.0029
		$\frac{1}{800}$	3.4859e-6	2.0025	6.1336e-6	2.0015
0.5	0.1	$\frac{1}{100}$	3.5759e-4		5.5375e-4	
		$\frac{1}{200}$	8.9017e-5	2.0061	1.3794e-4	2.0052
		$\frac{1}{400}$	2.2211e-5	2.0028	3.4421e-5	2.0027
		$\frac{1}{800}$	5.5479e-6	2.0012	8.5966e-6	2.0015
	0.5	$\frac{1}{100}$	3.5573e-4		5.5208e-4	
		$\frac{1}{200}$	8.8554e-5	2.0062	1.3753e-4	2.0052
		$\frac{1}{400}$	2.2095e-5	2.0028	3.4316e-5	2.0027
		$\frac{1}{800}$	5.5190e-6	2.0012	8.5704e-6	2.0015
	0.9	$\frac{1}{100}$	3.5107e-4		5.4784e-4	
		$\frac{1}{200}$	8.7391e-5	2.0062	1.3647e-4	2.0052
		$\frac{1}{400}$	2.1805e-5	2.0028	3.4053e-5	2.0027
		$\frac{1}{800}$	5.4466e-6	2.0012	8.5046e-6	2.0014
0.99	0.1	$\frac{1}{100}$	5.3072e-4		7.4972e-4	
		$\frac{1}{200}$	1.3214e-4	2.0059	1.8685e-4	2.0045
		$\frac{1}{400}$	3.2969e-5	2.0029	4.6637e-5	2.0023
		$\frac{1}{800}$	8.2346e-6	2.0014	1.1649e-5	2.0012
	0.5	$\frac{1}{100}$	5.2879e-4		7.4793e-4	
		$\frac{1}{200}$	1.3166e-4	2.0059	1.8640e-4	2.0045
		$\frac{1}{400}$	3.2848e-5	2.0029	4.6525e-5	2.0023
		$\frac{1}{800}$	8.2043e-6	2.0014	1.1621e-5	2.0012
	0.9	$\frac{1}{100}$	5.2406e-4		7.4349e-4	
		$\frac{1}{200}$	1.3048e-4	2.0059	1.8529e-4	2.0045
		$\frac{1}{400}$	3.2554e-5	2.0029	4.6249e-5	2.0023
		$\frac{1}{800}$	8.1308e-6	2.0014	1.1552e-5	2.0012

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 4. С. 660–670. <http://mi.mathnet.ru/de7144>
2. Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368. <http://mi.mathnet.ru/tmf5547>
3. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
4. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
5. Полубаринова–Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
6. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Университетская книга, 2005.
7. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 545–548. <http://mi.mathnet.ru/dan23599>
8. Дзекцер Е. С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // ДАН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 540–543. <http://mi.mathnet.ru/dan38808>
9. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement // L'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. № 9. Pp. 27–62.
10. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Энерго- и массообмен в системе растение–почва–воздух. Л.: Гидрометиздат, 1975.
11. Chen P. J., Curtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 1968. No. 19. P. 614–627. <https://doi.org/10.1007/BF01594969>
12. Канчукоев В. З., Шхануков М. Х. Краевые задачи для уравнений тепломассаобмена и их аппроксимация устойчивыми разностными схемами // В сб.: Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики. Нальчик, 1979. № 2. С. 143–150.
13. Канчукоев В. З. Краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанного гиперболопсевдопараболического типа: дис. ... к-та физ.-матем. наук / Нальчик, 1984. 101 с.
14. Канчукоев В. З. Краевые задачи для уравнений псевдопараболического и смешанного гиперболопсевдопараболического типов и их приложения к расчету тепломассаобмена в почвогрунтах // В сб.: САПР и АСПР в мелиорации. Нальчик, 1983. С. 131–138.
15. Кочина Н. Н. Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах // ДАН СССР. 1973. Т. 213. № 1. С. 51–54. <http://mi.mathnet.ru/dan37901>
16. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 1. С. 105–110. <http://mi.mathnet.ru/de2971>
17. Зикиров О. С., Холиков Д. К. Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23. № 2. С. 19–30. <http://mi.mathnet.ru/svfu21>
18. Алиханов А. А., Березгов А. М., Шхануков–Лафишев М. Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf111>
19. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 99–112. <https://doi.org/10.7868/S0044466916010038>
20. Kuldip S. P., Mani M. Fourth-order compact scheme for option pricing under the Merton's and Kou's jump–diffusion models // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2018. Vol. 21. No. 4. 1850027. <https://doi.org/10.1142/S0219024918500279>
21. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conference Series: Materials Science and

- Engineering. 2016. Vol. 158. No. 1. 012019.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>
22. Бештоков М. Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 2021–2041.
<https://doi.org/10.7868/S0044466917120092>
 23. Бештоков М. Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 249–266.
<https://doi.org/10.1134/S0374064118020115>
 24. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 658–664.
 25. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 280. P. 424–438.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031>
 26. Бештоков М. Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова–Капуто // Известия вузов. Математика. 2018. № 10. С. 3–16.
<http://mi.mathnet.ru/ivm9400>
 27. Бештоков М. Х. Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 7. С. 919–928.
<https://doi.org/10.1134/S0374064119070021>
 28. Хибиев А. Х. Устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения диффузии дискретно-распределенного порядка с обобщенными функциями памяти // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 3. С. 582–597. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1690>
 29. Пименов В. Г., Хенди А. С. Неявный численный метод решения дробного уравнения адвекции–диффузии с запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 218–226. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-218-226>
 30. Pimenov V. G., Hendy A. S. A fractional analog of Crank–Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay // Ural Math. J. 2016. Vol. 2. Issue 1. P. 48–57.
<https://doi.org/10.15826/umj.2016.1.005>
 31. Pimenov V. G. Numerical methods for fractional advection–diffusion equation with heredity // J. Math. Sci. (NY). 2018. Vol. 230. No. 5. P. 737–741.
<https://doi.org/10.1007/s10958-018-3780-6>
 32. Беданоква С. Ю. Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. 4: Естественно-математические и технические науки. 2007. № 4. С. 68–71.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11967713>
 33. Бештоков М. Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 10. С. 1780–1794.
<https://doi.org/10.7868/S0044466916100045>
 34. Бештоков М. Х. О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 10. С. 1393–1406.
<https://doi.org/10.1134/S0374064116100125>
 35. Бештоков М. Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 763–778.
<https://doi.org/10.1134/S0374064118060055>
 36. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
 37. Воеводин А. Л., Шугрин С. М. Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 11.02.2020

Бештоков Мурат Хамидбиевич, к. ф.-м. н., доцент, Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Цитирование: М. Х. Бештоков. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 158–175.

M. Kh. Beshtokov**Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution**

Keywords: boundary value problems, a priori estimation, loaded equations, difference scheme, pseudoparabolic equation, moisture transfer equation, Hallaire's equation, Caputo fractional derivative.

MSC2010: 35L25

DOI: [10.35634/vm200202](https://doi.org/10.35634/vm200202)

The paper is devoted to the construction of approximate solutions of boundary value problems in a rectangle for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator, which act as mathematical models of the movement of moisture and salts in soils with fractal organization. Difference schemes for differential problems are constructed. The method of energy inequalities is used to derive a priori estimates of solutions to the problems under consideration in differential and difference interpretations. The obtained a priori estimates are followed by uniqueness, stability of the solution from the initial data and the right part, as well as convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem with a speed equal to the order of approximation error. An algorithm for the numerical solution of difference schemes obtained by approximating boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator is constructed.

REFERENCES

1. Kochubei A.N. Diffusion of fractional order, *Differential Equations*, 1990, vol. 26, issue 4, pp. 485–492.
2. Nigmatullin R.R. Fractional integral and its physical interpretation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 90, issue 3, pp. 242–251. <https://doi.org/10.1007/BF01036529>
3. Nakhushev A.M. *Uravneniya matematicheskoi biologii* (Equations of mathematical biology), Moscow: Vysshaya shkola, 2012.
4. Chudnovsky A.F. *Teplofizika pochv* (Thermal physics of soils), Moscow: Nauka, 1976.
5. Polubarinova-Kochina P.Ya. *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* (The theory of groundwater movement), Moscow: Nauka, 1977.
6. Potapov A.A. *Fraktaly v radiofizike i radiolokatsii: Topologiya vyborki* (Fractals in radio physics and radiolocation: Topology of sample), Moscow: Universitetskaya Kniga, 2005.
7. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P. Fundamental equations of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, vol. 132, issue 3, pp. 545–548 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/dan23599>
8. Dzektser E.S. Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 220, issue 3, pp. 540–543 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/dan38808>
9. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en regime de dessechement, *L'Eau et la Production Vegetale. Paris: Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, no. 9, pp. 27–62.
10. Nerpin S.V., Chudnovskii A.F. *Energo- i massobmen v sisteme rasteniye–pochva–vozdukh* (Energy and mass transfer in the system plant–soil–air), Leningrad: Gidrometizdat, 1975.
11. Chen P.J., Curtin M.E. On a theory of heat conduction involving two temperatures, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1968, no. 19, pp. 614–627. <https://doi.org/10.1007/BF01594969>
12. Kanchukoev V.Z., Shkhanukov M.Kh. Boundary value problems for heat and mass transfer equations and their approximation by stable difference schemes, *Boundary-value problems for equations of mixed type and related problems of functional analysis and applied mathematics*, Nalchik, 1979, vol. 2, pp. 143–150 (in Russian).

13. Kanchukoev V.Z. *Boundary value problems for a third-order equation of mixed hyperbolic-pseudo-parabolic type*, Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Nalchik, 1984, 101 p. (In Russian).
14. Kanchukoev V.Z. Boundary value problems for pseudoparabolic and hyperbolic-pseudoparabolic equations and their applications to computation of heat and mass transfer in soils, in *CAD Systems and Computerized Systems of Planning Calculations in Land Development*, Nalchik, 1983, pp. 131–138 (in Russian).
15. Kochina N.N. Regulation of the level of ground waters during irrigation, *Sov. Phys., Dokl.*, 1973, vol. 18, pp. 689–691. <https://zbmath.org/?q=an:0303.73085>
16. Nakhushev A.M., Borisov V.N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to the prediction of groundwater level, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 105–110 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/de2971>
17. Zikirov O.S., Kholikov D.K. On some problem for a loaded pseudoparabolic equation of the third order, *Mathematical Notes of NEFU*, 2016, vol. 23, issue 2, pp. 19–30 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/svfu21>
18. Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov–Lafishev M. Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, issue 9, pp. 1581–1590. <https://doi.org/10.1134/S096554250809008X>
19. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, pp. 93–105. <https://doi.org/10.1134/S0965542516010036>
20. Kuldip S.P., Mani M. Fourth-order compact scheme for option pricing under the Merton's and Kou's jump-diffusion models, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2018, vol. 21, no. 4, 1850027. <https://doi.org/10.1142/S0219024918500279>
21. Beshtokov M.Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 158, no. 1, 012019. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>
22. Beshtokov M.Kh. Differential and difference boundary value problem for loaded third-order pseudo-parabolic differential equations and difference methods for their numerical solution, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1973–1993. <https://doi.org/10.1134/S0965542517120089>
23. Beshtokov M.Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev type equations with a nonlocal source in differential and difference forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. <https://doi.org/10.1134/S0012266118020118>
24. Alikhanov A.A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 5, pp. 660–666. <https://doi.org/10.1134/S0012266110050058>
25. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031>
26. Beshtokov M.Kh. To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov–Caputo fractional derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 10, pp. 1–14. <https://doi.org/10.3103/S1066369X18100018>
27. Beshtokov M.Kh. Boundary value problems for a pseudoparabolic equation with the Caputo fractional derivative, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 7, pp. 884–893. <https://doi.org/10.1134/S0012266119070024>
28. Khibiev A.Kh. Stability and convergence of difference schemes for the multi-term time-fractional diffusion equation with generalized memory kernels, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 582–597 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1690>
29. Pimenov V.G., Hendy A.S. An implicit numerical method for the solution of the fractional advection–diffusion equation with delay, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2,

- pp. 218–226 (in Russian).
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-218-226>
30. Pimenov V. G., Hendy A. S. A fractional analog of Crank–Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay, *Ural Mathematical Journal*, 2016, vol. 2, issue 1, pp. 48–57. <https://doi.org/10.15826/umj.2016.1.005>
31. Pimenov V. G. Numerical methods for fractional advection–diffusion equation with heredity, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 737–741.
<https://doi.org/10.1007/s10958-018-3780-6>
32. Bedanokova S. Yu. The equation of motion of soil moisture and a mathematical model of soil moisture content based on the Hallaire’s equation, *Vestnik Adygeiskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. 4: Estestvenno-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki*, 2007, no. 4, pp. 68–71 (in Russian).
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11967713>
33. Beshtokov M. Kh. Difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a degenerating third-order pseudo-parabolic equation with variable coefficients, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1763–1777.
<https://doi.org/10.1134/S0965542516100043>
34. Beshtokov M. Kh. On the numerical solution of a nonlocal boundary value problem for a degenerating pseudoparabolic equation, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1341–1354.
<https://doi.org/10.1134/S0012266116100104>
35. Beshtokov M. Kh. Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann–Liouville fractional derivative, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 758–774. <https://doi.org/10.1134/S0012266118060058>
36. Samarskii A. A. *The theory of difference schemes*, New York: Marcel Dekker, 2001.
37. Voevodin A. F., Shugrin S. M. *Chislennyye metody rascheta odnomernykh sistem* (Numerical methods for the analysis of one-dimensional systems), Novosibirsk: Nauka, 1981.

Received 11.02.2020

Beshtokov Murat Khamidbievich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, ul. Shortanova, 89 A, Nalchik, 360000, Russia.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Citation: M. Kh. Beshtokov. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 158–175.