A. A. Kozlov, The global control over asymptotical invariants of linear systems in small dimensions, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 54–56

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.174.16.151

April 26, 2023, 12:55:41

УДК 517.926+517.977

© А. А. Козлов

ГЛОБАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ¹

Для двумерных линейных равномерно вполне управляемых систем с локально интегрируемыми коэффициентами получены достаточные условия глобальной управляемости показателей Ляпунова и глобальной ляпуновской приводимости. Для трехмерных систем приводится основная лемма, позволяющая перенести на них эти результаты.

Ключевые слова: равномерная полная управляемость, показатели Ляпунова.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

с локально интегрируемыми по Лебегу матрицами коэффициентов A и B . Будем также считать, что эти матрицы обладают свойством интегральной ограниченности, то есть для всех $t \geq 0$ справедливы неравенства $\int_t^{t+1} \|A(\tau)\| d\tau < +\infty$ и $\int_t^{t+1} \|B(\tau)\| d\tau < +\infty$. Замкнем систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x$, в которой произвольная фиксированная $(m \times n)$ -матрица U предполагается ограниченной и измеримой. Тогда получим замкнутую однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

характеристическими показателями которой будут являться числа

$$\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU).$$

Задача глобального управления показателями Ляпунова состоит в построении для системы (1) такой обратной связи $u = U(t)x$, которая обеспечила бы равенства

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \quad i = \overline{1, n},$$

¹Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели».

где $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ — заранее фиксированные вещественные числа. Если же для любой наперед заданной системы

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей C найдется такое управление $u = U(t)x$, что система (2) с этим управлением будет асимптотически эквивалентна системе (3), то есть будет существовать преобразование Ляпунова, связывающее эти системы, то в этом случае говорят [1], что система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости. При этом заметим, что все ляпуновские инварианты наперед заданной системы (3) и системы (2) с управлением U будут совпадать. Поэтому свойство глобальной ляпуновской приводимости также называют [2] свойством глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов. Относящиеся сюда основные определения и результаты можно найти в работах [1–3]. Отметим, что все известные результаты получены только для случая системы (2) с кусочно равномерно непрерывной матрицей B .

Пусть $n = 2$ и $m \in \{1, 2\}$, тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если система (1) равномерно вполне управляема, то показатели Ляпунова замкнутой системы (2) глобально управляемы.*

Теорема 2. *Если $A(t) \equiv 0$, $t \geq 0$ и система (1) равномерно вполне управляема, то система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Обобщение теорем 1 и 2 для случая $n \geq 3$ пока не получено. Однако справедлив следующий трехмерный аналог ключевой леммы, использующейся в доказательстве этих теорем.

Пусть $X(t, s)$, $t, s \geq 0$ — матрица Коши системы (2) с нулевым управлением. Возьмем некоторое $\sigma > 0$. Зафиксируем произвольные $t_0 \geq 0$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и разобьем отрезок $[t_0, t_0 + \sigma]$ точками t_i , $i = \overline{1, p-1}$ на p равных частей. Для любой измеримой и ограниченной функции $u(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ положим $w_i(t_0, u) := \int_{t_{i-1}}^{t_i} X(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau$, $i = \overline{1, p}$. Имеет место

Лемма 1. *Пусть $n = 3$ и $m \in \{1, 2, 3\}$. Если система (1) σ -равномерно вполне управляема, то существуют такие $\theta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любых $t_0 \geq 0$, $0 < \varphi \leq \theta$ и $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ найдутся числа $\theta_1 = \theta_1(\theta) > 0$ и $\ell = \ell(\gamma, \varphi) > 0$, круговые конусы $K_i \subset \mathbb{R}^3$, величины углов раствора*

которых не превосходят φ , измеримые управления $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ и множества $M_i \subset \{1, \dots, p\}$, $i = \overline{1, 3}$, для которых выполняются соотношения $\angle(K_i, K_j) \geq \theta_1$, $i, j = \overline{1, 3}$, $i \neq j$, $\|u_i(t)\| \leq \gamma$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, $i = \overline{1, 3}$, $w_j(t_0, u_i) \in K_i$, $j \in M_i$, $i = \overline{1, 3}$, и $\|\sum_{j \in M_i} w_j(t_0, u_i)\| \geq \ell$.

Аналог леммы 1 в двумерном случае позволяет найти для системы (1) на произвольном фиксированном отрезке длины σ такие два измеримых, ограниченных векторных управления и соответствующих им два подмножества этого отрезка, что векторы, являющиеся решениями уравнения (1) с найденными управлениями, при одних и тех же начальных условиях в каждой точке указанных подмножеств образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. На основе этих управлений строится матричное управление для исходной задачи.

* * *

1. Tonkov E. L. Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2000. Suppl. 1. P. S228–S253.
2. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 97–106.
3. Попова С. Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1048–1054.

Поступила в редакцию 28.01.08

A. A. Kozlov

The global control over asymptotical invariants of linear systems in small dimensions

For two-dimensional linear uniformly controllable systems we study the properties of global controllability of Lyapunov exponents and global Lyapunov reducibility. For three-dimensional linear uniformly controllable systems we give the basic lemma providing the possibility to generalize the two-dimensional results for three-dimensional case.

Козлов Александр Александрович
Институт математики НАН Республики Беларусь
220072, Беларусь, г. Минск,
ул. Сурганова, 11
E-mail: kozlovaa@tut.by