N. N. Krasovskii, A. N. Kotel'nikova, One problem of the optimal control of a system with aftereffect in conditions of conflict, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 65–70

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.174.149.18

April 26, 2023, 18:14:14

УДК 517.934

© Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
СИСТЕМОЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ
В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА¹**

Рассматривается задача об оптимальном управлении по быстродействию. Обсуждаются достаточные условия локальной оптимальности, связанные с необходимыми условиями принципа максимума Понтрягина [1] при условии полной управляемости системы в вариациях. Задача обсуждается для системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением, обыкновенным или с последействием. В случае конфликтного управления обсуждается задача оптимального управления по критерию минимакса-максимина времени выхода системы в заданное состояние. Рассматривается модельный пример и обсуждается соответствующий вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: оптимальное управление, локальная оптимальность по быстродействию, конфликтное управление, минимакс, максимин времени до встречи, интегро-дифференциальное уравнение, обобщенное решение, предельная система в вариациях, фундаментальная матрица системы в вариациях, полная управляемость, функционал Ляпунова.

В работе рассматриваются две системы, которые относятся к кругу задач об управлении, когда движение $x[t]$ описывается интегро-дифференциальным уравнением

$$\dot{x}[t] = H\left(t, x[t]; u[t], v[t]\right) + \int_{t_0}^t d_{\vartheta} G(t, \vartheta; x[\vartheta]), \quad (1)$$

$$t_0 \leq t < \infty; \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}; \quad u = \{u_1, \dots, u_r\}; \quad v = \{v_1, \dots, v_r\}.$$

Здесь $u[t]$ и $v[t]$ — реализации конфликтующих управлений, для которых оговорены ограничения $u \in U$, $v \in V$, U и V — компакты; $\dot{x}[t]$ — правая производная; x, u, v — векторы-столбцы.

Для рассматриваемых уравнений с последействием интерпретируются достаточные условия локальной оптимальности по быстродействию и

¹Работа выполнена при финансовой поддержке (грант Президента РФ НШ № 8512.2006.1 и грант РФФИ № 06-01-00436).

подход к задаче о конфликтном управлении по критерию минимакс-максимина времени до встречи, предложенные в [2, 3] для случаев обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения уравнений трактуются как конструктивные движения в согласии с [4]: движения $x[t]$ формализуются как пределы последовательностей решений подходящих аппроксимирующих уравнений. В линейном случае обобщенная фундаментальная матрица решений $\bar{F}(t, \vartheta)$ и управления $u[t], v[t]$ формализуются на основе предельных переходов. В общем нелинейном случае, как и в работе [4], управляющие воздействия могут формально игнорироваться, а по сути дела они могут аннигилироваться. Содержательно движения $x[t]$ строятся в аппроксимационной схеме. При этом интеграл Стильеса в уравнениях вида (1) аппроксимируется последовательностями импульсов.

Для уравнения частного вида

$$\dot{x}[t] = H(t, x[t]) + \int_{t_0}^t G(t, \vartheta, x[\vartheta]) d\vartheta + \sum_{s=0}^{s[t]} G^{[s]}(t, x[t^{[s]}]) + B(t)u[t], \quad (2)$$

$$t_0 \leq t < \infty, \quad t^{[0]} = t_0, \quad t^{[s]} < t^{[s+1]}, \quad s[t] = \max\{s : t^{[s]} \leq t\}$$

рассматривается задача о локальной оптимальности по быстродействию:

$$x[t_0] = x_0, \quad x[T] = x^0, \quad T^0 = \min T.$$

В (2) функции H , G , $G^{[s]}$, B непрерывны, функции H , G , $G^{[s]}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x . Заданы ограничения

$$\|u\|^* = \max\{|u_s| : s = 1, \dots, r\} \leq 1.$$

Используются аппроксимирующие уравнения:

$$\dot{x}[t] = H(t, x[t]) + \sum_{\nu=0}^{\nu[t]} G^{(\nu)}(t, x[\vartheta^{(\nu)}]), \quad (3)$$

$$\vartheta^{(\nu)} < \vartheta^{(\nu+1)}, \quad \nu[t] = \max\{\nu : \vartheta^{(\nu)} \leq t\}.$$

Во множестве $\{\vartheta^{(\nu)}\}$ содержатся все $t^{[s]}$, при $\vartheta^{(\nu)} = t^{[s]}$ имеем $G^{(\nu)} = G^{[s]}$, иначе $G^{(\nu)}(t, x[\vartheta^{(\nu)}]) = G(t, \vartheta^{(\nu)}, x[\vartheta^{(\nu)}])(\vartheta^{(\nu+1)} - \vartheta^{(\nu)})$. Конструктивное движение $x[t]$, $t_0 \leq t \leq T$ — решение исходного уравнения (2) — определяется как равномерный предел для некоторой последовательности решений $x^{[l]}[t]$, $t_0 \leq t \leq T$, $l = 1, 2, \dots$, отвечающей некоторой последовательности аппроксимирующих уравнений (3), причем предполагаем, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \max_{\nu} (\vartheta^{(\nu+1, l)} - \vartheta^{(\nu, l)}) = 0$. Системе в вариациях

$$\dot{\delta x}[t] = P(t)\delta x[t] + \sum_{\nu=0}^{\nu[t]} Q^{(\nu)}(t)\delta x[\vartheta^{(\nu)}] + B(t)\delta u[t] \quad (4)$$

для уравнения (3) для некоторого решения $x[t]$, $t_0 \leq t \leq T$ этого уравнения отвечает обобщенная фундаментальная матрица решений $\bar{F}(t, \vartheta) = \{\tilde{F}^{[x]}(t, t_0), \tilde{F}(t, \vartheta)\}$. Для нее по формуле Коши для уравнения

$$\dot{x}[t] = P(t)x[t] + f(t) \quad (5)$$

уже на основе фундаментальной матрицы $F(t, \vartheta)$ для однородной части этого уравнения (5) естественно получаются следующие рекуррентные соотношения при $\vartheta^{(\nu)} < \tau \leq \vartheta^{(\nu+1)}$, $\nu = 0, 1, \dots$

$$\tilde{F}^{[x]}(\tau, t_0) = F(\tau, t_0) + \sum_{\zeta=0}^{\nu} \int_{\vartheta^{(\zeta)}}^{\tau} F(\tau, \eta) Q^{(\zeta)}(\eta) d\eta \tilde{F}^{[x]}(\vartheta^{(\zeta)}, t_0), \quad (6)$$

$$\tilde{F}(\tau, \vartheta) = F(\tau, \vartheta) + \sum_{\zeta=1}^{\nu} \int_{\vartheta^{(\zeta)}}^{\tau} F(\tau, \eta) Q^{(\zeta)}(\eta) d\eta \tilde{F}(\vartheta^{(\zeta)}, \vartheta). \quad (7)$$

Таким образом, решение $\delta x[t]$ уравнения (4) записывается в виде

$$\delta x[t] = \tilde{F}^{[x]}(t, t_0) \delta x[t_0] + \int_{t_0}^t \tilde{F}(t, \vartheta) B(\vartheta) \delta u[\vartheta]. \quad (8)$$

Обобщенная фундаментальная матрица $\bar{F}(t, \vartheta)$ для системы в вариациях для конструктивного движения $x[t]$, $t_0 \leq t \leq T$ — решения уравнения (2) — определяется предельным переходом от последовательности $\{\tilde{F}^{[x, l]}, \tilde{F}^{[l]}\}$ фундаментальных матриц, отвечающих системам в вариациях для аппроксимирующих уравнений (3).

Обсуждаются достаточные условия, которые связывают конструкции принципа максимума [1], классические условия [5] для второй вариации $\delta^{[2]}x[t]$ и условия управляемости [6–8] для системы в вариациях на оптимальном движении $x^0[t]$.

У с л о в и е 1. Обобщенная система в вариациях для исходного уравнения (2) на движении $x^0[t]$ (и аппроксимирующие ее системы (4)) *сильно вполне управляемы* по каждой координате u_s , $s = 1, \dots, r$: для каждого вектора $|l| \neq 0$ равенство $\|l' \tilde{F}(T, \tau) b^{[s]}(\tau)\| = 0$ возможно лишь для конечного множества значений $\tau_k^{[s]}(T)$, $k \leq k^{[s]}(T)$; $\|\cdot\|$ — норма, с которой сопряжена норма $\|\cdot\|^*$, индекс штрих — знак транспонирования.

У с л о в и е 2. Обобщенное оптимальное управление $u^0[t]$ для движения $x^0[t]$ определяется как слабый предел последовательности управляющих воздействий $u^{[l]}$ для подходящей последовательности аппроксимирующих движений $x^{[l]}[t]$. Полагаем, что управление $u^0[t]$ удовлетворяет условию максимума

$$l^{0'}(T^0) \tilde{F}(T^0, t) B(t) u^0[t] = \max_{\|u\|^* \leq 1} l^{0'}(T^0) \tilde{F}(T^0, t) B(t) u.$$

У с л о в и е 3. Выполнено неравенство $l^{0'}(T^0)\dot{x}^0[T^0]_{-0} \geq \zeta$, $\zeta > 0$.

У с л о в и е 4. Векторы $a_k^{[s]}$, определяющие влияние допустимых вариаций $\delta u[t]$ в малых окрестностях критических точек $\tau_k^{[s]}(T^0)$, формализуются на базе искусственно вводимых импульсных вариаций $\delta(\tau - \tau_k^{[s]})$. Эти векторы $a_k^{[s]}$ представляются в следующей форме:

$$a_k^{[s]} = \int_{\tau_k^{[s]}}^{T^0} \tilde{F}(T^0, \tau) \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 H(\tau, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x^0[\tau]} \left[\tilde{F}(\tau, \tau_k^{[s]}) b^{[s]}(\tau_k^{[s]}) \right]_i \left[\tilde{F}(\tau, \tau_k^{[s]}) b^{[s]}(\tau_k^{[s]}) \right]_j \right. \\ \left. + \int_{\tau_k^{[s]}}^{\tau} \left(\frac{\partial^2 [d_\vartheta G(\tau, \vartheta; x[\vartheta])]}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x^0[\cdot]} \left[\tilde{F}(\vartheta, \tau_k^{[s]}) b^{[s]}(\tau_k^{[s]}) \right]_i \left[\tilde{F}(\vartheta, \tau_k^{[s]}) b^{[s]}(\tau_k^{[s]}) \right]_j d\vartheta \right] d\tau.$$

Полагаем, что выполнены неравенства $l^{0'}(T^0)a_k^{[s]} \leq -\gamma < 0$, $k \leq k^{[s]}(T^0)$.

Утверждение 1. При условиях 1–4 движение $x^0[\cdot]$ локально оптимально, то есть существует $\varepsilon > 0$ такое, что не существует допустимого движения $x^*[\cdot]$, которое удовлетворяло бы условиям

$$x^*[t_0] = x_0, \quad x^*(T^*) = x^0, \quad T^* < T^0, \quad |x^*[t] - x^0[t]| < \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq T^*.$$

У с л о в и е 5. Выполнено условие *очень сильной полной управляемости*: при условии 1 для каждой критической точки $\tau_k^{[s]}$ в достаточно малой ее окрестности $|\tau - \tau_k^{[s]}| < \delta$, где $\delta > 0$, выполняются неравенства $\|l^{0'}(T^0)\tilde{F}(T^0, \tau)b(\tau)\| \geq \sigma|\tau - \tau_k^{[s]}|$, $\sigma > 0$.

Утверждение 2. При условиях 1–3, 5 существует такое значение $\gamma(\zeta, \nu) > 0$, что при выполнении неравенств $l^{0'}a_k^{[s]} \leq \gamma$, $s = 1, \dots, r$, $k \leq k^{[s]}$ движение $x^0[\cdot]$ будет локально оптимальным по быстродействию.

Следствие 1. При условиях 1–3, 5 существует такое $\beta > 0$, что при выполнении неравенств $\left| \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \beta$ и $\left| \frac{\partial^2 dG}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \beta$, $i, j = 1, \dots, n$ движение $x^0[\cdot]$ будет локально оптимальным по быстродействию.

Для системы, описываемой линейным уравнением

$$\dot{x}[t] = P(t)x[t] + \int_{t_0}^t G(t, \vartheta)x[\vartheta]d\vartheta + \sum_{s=0}^{s[t]} G^{[s]}(t)x[t^{[s]}] + B(t)(u[t] - v[t]), \quad (9)$$

$t_0 \leq t < \infty$, рассматривается задача на минимакс-максимин τ^0 времени τ до встречи $|x^{[m]}[\tau]| = \varepsilon_M > 0$. Здесь $x^{[m]}$ — вектор из первых m координат $1 \leq m \leq n$ вектора x ; $\|u\|^* \leq \beta$, $\|v\|^* \leq \gamma$, $\beta - \gamma = \rho > 0$, $\gamma > 0$, $\|w\|^*$ — некоторая оговоренная норма; величина ε_M задана.

Здесь в приложении к уравнению (9) трансформируются экстремальные прицеливание и сдвиг, использованные для обыкновенных уравнений [4, 8]. Строятся стратегии сближения $u^0(x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t)$ и α -уклонения $v^\alpha(x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t)$. Стратегия $u^0(\cdot)$, гарантирующая встречу $|x^{[m]}[\tau]| = \varepsilon_M$ не позже момента τ^0 , определяется из условия минимума производной $\dot{\varepsilon}_t$ для функционала Ляпунова

$$\begin{aligned} \varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t, \tau^0) = \\ = \max_{|l|=1} (l' \tilde{x}[\tau^0] + \min_u \max_v l' \int_t^{\tau^0} \tilde{F}(\tau^0, \vartheta) B(\vartheta) (u[\vartheta] - v[\vartheta]) d\vartheta). \end{aligned} \quad (10)$$

Для реализации $u^0[t]$ это дает условие

$$l^{0r}(t, \tau^0) \tilde{F}(\tau^0, t) B(t) u^0[t] = \min_{\|u\|^* \leq \beta} l^{0r}(t, \tau^0) \tilde{F}(\tau^0, t) B(t) u, \quad (11)$$

где $l^{0r}(t, \tau)$ — максимизирующий вектор в (10).

Стратегия $v^\alpha(\cdot)$, гарантирующая при сколь угодно малом $\alpha > 0$ уклонение $|x^{[m]}[t]| > \varepsilon_M$ по крайней мере до момента $\tau^0 - \alpha$, определяется из условия минимума производной $\dot{\lambda}_t$ для функционала Ляпунова

$$\lambda^\alpha(x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t, \tau^0 - \alpha) = \int_t^{\tau^0 - \alpha} [\varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t, \tau) - \varepsilon_M]^{-1} d\tau. \quad (12)$$

Для реализации $v^\alpha[t]$ это дает условие

$$s'[t, \tau^0 - \alpha] B(t) v^\alpha[t] = \min_{\|v\|^* \leq \gamma} s'[t, \tau^0 - \alpha] B(t) v. \quad (13)$$

Здесь вектор $s[t, \tau^0 - \alpha]$ определен равенством

$$s[t, \tau^0 - \alpha] = \int_t^{\tau^0 - \alpha} [\varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t, \tau) - \varepsilon_M]^{-2} l^0(t, \tau) \tilde{F}^{[u]}(\tau, t) d\tau. \quad (14)$$

В (10) $\tilde{x}[\tau^0]$ формируется по истории $\{x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t\}$ на базе фундаментальной матрицы $\tilde{F}^{[x]}(\tau, \vartheta)$, $t_0 \leq \vartheta \leq t$ для движения $x[\tau]$ (9); учитываются аппроксимационные и предельные соотношения, подобные (6), (8); τ^0 — наименьший корень уравнения $\varepsilon(x[\vartheta], t_0 \leq \vartheta \leq t, \tau) = \varepsilon_M$; вектор $l = \{l^{[m]}, 0\}$.

Критерии локальной оптимальности обсуждаются для случаев, когда управление u входит в исходное уравнение нелинейно. Тогда управляющие воздействия в необходимых условиях оптимальности принципа максимума формализуются как вероятностные меры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // ПММ. 1959. Т. 23. С. 209–229.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
5. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.
6. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Тр. I Конгресса ИФАК. 1961. Т. 1.
7. Гамкредидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Известия АН СССР. 1958. Т. 22. С. 449–474.
8. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования // ПММ. 1957. Т. 21. С. 670–677.

Поступила в редакцию 28.01.08

N. N. Krasovskii, A. N. Kotel'nikova

One problem of the optimal control of a system with aftereffect in conditions of conflict

In the paper a time-optimal control problem is considered. Sufficient conditions for local optimality are obtained which are linked with necessary conditions of Pontryagin's maximum principle under assumption of total controllability of a system in variations. The problem is studied for a system described by a vector differential equation either ordinary or with aftereffect. In the case of conflict control, the optimal control problem is discussed for a criterion of the minmax-maxmin time when the system attains a given state. The model example is given and the corresponding numerical experiment is discussed.

Красовский Николай Николаевич
Институт математики
и механики УрО РАН
Россия, г.Екатеринбург,
ул.Софьи Ковалевской, 16
e-mail: nnkras@imm.uran.ru

Котельникова Анна Николаевна
Институт математики
и механики УрО РАН
Россия, г.Екатеринбург,
ул.Софьи Ковалевской, 16
e-mail: annk222@rambler.ru