Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Blagodatskikh, Multiple capture in a Pontriagin's problem, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, Issue 2, 3–12

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.207.199.55

April 26, 2023, 10:50:39

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.8

© А. И. Благодатских

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В ПРИМЕРЕ ПОНТРЯГИНА¹

Получены достаточные условия многократной поимки в примере Понтрягина с одинаковыми возможностями всех участников.

Ключевые слова: дифференциальные игры, групповое преследование, поимка, многократная поимка, пример Понтрягина.

Введение

Задача простого группового преследования с равными возможностями впервые рассматривалась Б. Н. Пшеничным [1], были получены необходимые и достаточные условия поимки. Для задачи с простыми движениями и равными возможностями Н. Л. Григоренко [2] были представлены необходимые и достаточные условия многократной поимки. Н. Н. Петров [3] получил достаточные условия многократной поимки в примере Л. С. Понтрягина с равными возможностями. В данной работе рассматривается обобщенный нестационарный пример Л. С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков, получены достаточные условия многократной и нестрогой одновременной многократной поимки, а для случая простых движений участников получены необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки. Управления преследователей, гарантирующие разрешимость указанных задач не позднее некоторого момента времени, построены в явном виде.

Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. В задаче о нестрогой одновременной многократной поимке дополнительно к условиям задачи о многократной поимке требуется, чтобы моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадали. Наконец, в задаче об одновременной многократной поимке добавляется требование о том, чтобы совпадали наименьшие моменты поимки.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^\nu$ ($\nu \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и убегающего E с законами движения

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \dots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V, \quad (1.1)$$

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2(t)y^{(l-2)} + \dots + a_l(t)y = v, \quad v \in V, \quad (1.2)$$

соответственно и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$x_i^{(q)}(t_0) = X_i^q, \quad y^{(q)}(t_0) = Y^q, \quad \text{причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i, \quad (1.3)$$

здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^\nu$, V — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^\nu$ с гладкой границей такой, что $\text{Int } V \neq \emptyset$, функции $a_1(t), a_2(t), \dots, a_l(t)$ непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$,

$$i \in I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad q = 0, 1, \dots, l-1.$$

¹Работа поддержана грантом Президента РФ для молодых кандидатов наук (МК-2817.2008.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 06-01-00258, 09-01-00403).

Управления из класса измеримых по Лебегу на промежутке $[t_0, \infty)$ функций со значениями из V будем называть допустимыми. Для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ определим множество

$$\Omega(k) = \{(i_1, i_2, \dots, i_k) : i_1, i_2, \dots, i_k \in I \text{ попарно различны}\}.$$

Определение 1. В игре Γ возможна m -кратная поимка ($n \geq m \geq 1$), если существует момент $T_1 = T_1(X_i^q, Y^q)$ такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t, X_i^q, Y^q, v(s), t_0 \leq s \leq t)$$

такие, что для некоторых $\tau_k \in [t_0, T_1]$ и $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнено

$$x_k(\tau_k) = y(\tau_k) \text{ для всех } k \in \Lambda.$$

Определение 2. В игре Γ возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка, если существует момент $T_2 = T_2(X_i^q, Y^q)$ такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t, X_i^q, Y^q, v(s), t_0 \leq s \leq t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [t_0, T_2]$ и $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнено

$$x_k(\tau) = y(\tau) \text{ для всех } k \in \Lambda.$$

Определение 3. В игре Γ возможна одновременная m -кратная поимка, если существует момент $T_3 = T_3(X_i^q, Y^q)$ такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t, X_i^q, Y^q, v(s), t_0 \leq s \leq t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [t_0, T_3]$ и $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнено

$$x_k(\tau) = y(\tau), \quad x_k(s) \neq y(s) \text{ для всех } s \in [t_0, \tau), \quad k \in \Lambda.$$

§ 2. Достаточные условия многократной поимки

Соотношения (1.1), (1.2), (1.3), вводя замены $z_i = x_i - y$, перепишем в виде

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_i^{(q)}(t_0) = Z_i^q = X_i^q - Y^q. \quad (2.1)$$

Через $\varphi_q(t, s)$ ($t \geq s \geq t_0$) обозначим решение уравнения с начальными условиями

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \dots + a_l(t)\omega = 0,$$

$$\omega(s) = 0, \dots, \omega^{(q-1)}(s) = 0, \quad \omega^{(q)}(s) = 1, \quad \omega^{(q+1)}(s) = 0, \dots, \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)Z_i^0 + \varphi_1(t, t_0)Z_i^1 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)Z_i^{l-1}.$$

Предположение 1. Существуют непрерывные на промежутке $[t_0, \infty)$ функции $\alpha_i(t)$ и $\xi_i^1(t)$, обладающие следующими свойствами: 1) $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора; 2) $\alpha_i(t) > 0$ для всех $t \geq t_0$; 3) $\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi_i^1(t) - \alpha_i(t)\xi_i(t)) = 0$.

Выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору.

Предположение 2. Функции $\varphi_{l-1}(t, s)$ и $\alpha(t) = \min_{i \in I} \alpha_i(t)$ таковы, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| ds = \infty.$$

Случай $m = 1$, то есть простой поимки, в предположениях 1, 2 рассматривался в [6].

Условие 1. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_n^0 \in [t_0, \infty)$ такие, что

$$0 \in \text{Intco}\{\xi_k^1(\tau_k^0), k \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - m - 1).$$

Через $D(c, r)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке c радиуса r .

Лемма 1. Пусть выполнены предположение 1 и условие 1. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\Delta_1 > 0$, для которых справедливы утверждения: 1) для всех $K \in \Omega(n - m - 1)$ и $h_i \in D(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$ выполнено включение $0 \in \text{Intco}\{h_k, k \in K\}$; 2) для всех $t \geq t_0$ найдутся моменты $\tau_i \in [t, t + \Delta_1)$ такие, что $\alpha_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i) \in D(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$.

Доказательство. Выберем произвольное множество $K \in \Omega(n - m - 1)$. Множество $\text{co}\{\xi_k^1(\tau_k^0), k \in K\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках $\xi_p^1(\tau_p^0)$, где $p \in P \subset K$. Из условия 1 следует, что $0 \in \text{Intco}\{\xi_p^1(\tau_p^0), p \in P\}$. Так как множество $\text{Intco}\{\xi_p^1(\tau_p^0), p \in P\}$ является открытым, то найдется число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $0 \in \text{Intco}\{h_p, p \in P\}$ для любых $h_p \in D(\xi_p^1(\tau_p^0), \varepsilon_1)$. Из последнего включения, учитывая, что $\text{Intco}\{h_p, p \in P\} \subset \text{Intco}\{h_k, k \in K\}$, следует справедливость утверждения 1) данной леммы.

В силу предположения 1 функции $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими по Бору, поэтому найдется $T(\varepsilon_1) > 0$, для которого выполнено следующее утверждение: для всех $t \geq t_0$ существуют такие $\tau_i^1 \in [t, t + T(\varepsilon_1))$, что $\xi_i^1(\tau_i^1) \in D(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1/2)$. Из приведенного утверждения и свойства 3) предположения 1 следует, что при некотором $\Delta_1 = \Delta_1(\varepsilon_1) > 0$ утверждение 2) выполняется. $\square$

Выберем значения $\varepsilon_1 > 0$ и $\Delta_1 > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 1.

Определим функции ψ, λ, Q_i равенствами

$$\psi(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{l-1}(t, s) \geq 0, \\ -1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda(v, \psi, h) = \sup\{\lambda : \lambda \geq 0, (v - \lambda\psi h) \in V\}, \quad Q_i(t, h) = \alpha_i(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \lambda(v(s), \psi(t, s), h) ds.$$

Введем обозначения

$$d = (h_1, h_2, \dots, h_n), \quad d^* = (h_1^*, h_2^*, \dots, h_n^*), \quad D_1 = D(\xi_1^1(\tau_1^0), \varepsilon_1) \times D(\xi_2^1(\tau_2^0), \varepsilon_1) \times \dots \times D(\xi_n^1(\tau_n^0), \varepsilon_1),$$

$$\delta_1 = \min_{d \in D_1} \min_{\psi \in \{1, -1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in K} \lambda(v, \psi, h_k).$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие 1. Тогда $\delta_1 > 0$.

Доказательство. Зафиксируем любой набор $d \in D_1$. Пусть

$$\delta_1^+(d) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in K} \lambda(v, +1, h_k), \quad \delta_1^-(d) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in K} \lambda(v, -1, h_k).$$

Из условий леммы следует справедливость утверждения 1) леммы 1, поэтому

$$0 \in \text{Intco}\{h_k, k \in K\} \quad (0 \in \text{Intco}\{-h_k, k \in K\}) \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - m - 1).$$

Предположим, что $\delta_{+1}(d) = 0$ ($\delta_{-1}(d) = 0$). Тогда найдется $w \in V$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(m)$ существует элемент $p \in \Lambda$, для которого $\lambda(w, +1, h_p) = 0$ ($\lambda(w, -1, h_p) = 0$). Построим множество $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{n-m+1}\} \in \Omega(n-m+1)$ по следующему правилу. Выберем $q_1 \in L_1 = \{1, 2, \dots, m\} \in \Omega(m)$ из условия $\lambda(w, +1, h_{q_1}) = 0$ ($\lambda(w, -1, h_{q_1}) = 0$), затем $q_2 \in L_2 = (L_1 \cup \{m+1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(m)$ такой, что $\lambda(w, +1, h_{q_2}) = 0$ ($\lambda(w, -1, h_{q_2}) = 0$), и так далее. На последнем шаге построим множество $L_{n-m+1} = (L_{n-m} \cup \{n\}) \setminus \{q_{n-m}\} \in \Omega(m)$ и выберем элемент $q_{n-m+1} \in L_{n-m+1}$ по условию $\lambda(w, +1, h_{q_{n-m+1}}) = 0$ ($\lambda(w, -1, h_{q_{n-m+1}}) = 0$). По построению множество $Q \in \Omega(n-m+1)$ такое, что

$$\min_{v \in V} \max_{q \in Q} \lambda(v, +1, h_q) = 0 \quad (\min_{v \in V} \max_{q \in Q} \lambda(v, -1, h_q) = 0),$$

откуда следует, что $0 \notin \text{Intco}\{h_q, q \in Q\}$ ($0 \notin \text{Intco}\{-h_q, q \in Q\}$). Полученное противоречие доказывает, что

$$\delta_1^+(d) > 0 \quad (\delta_1^-(d) > 0).$$

В работе А. А. Чикрия [4] доказана непрерывность функции λ на каждом из множеств $V \times \{\pm 1\} \times D(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$, откуда вытекают равенства

$$\lim_{d^* \rightarrow d} \delta_1^\pm(d^*) = \lim_{d^* \rightarrow d} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} \lambda(v, \pm 1, h_k^*) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} \lambda(v, \pm 1, h_k) = \delta_1^\pm(d),$$

где $d^* \in D_1$, следовательно, функции $\delta_1^\pm$ являются непрерывными на D_1 . Учитывая еще, что множество D_1 — компакт, получаем соотношения $\delta_1 = \min_{d \in D_1} \{\delta_1^+(d), \delta_1^-(d)\} > 0$. $\square$

Лемма 3. Пусть выполнены предположения 1, 2 и условие 1. Тогда существует такой момент $T > t_0$, что для каждого допустимого управления $v(t)$ и $d \in D_1$ найдется такое множество $\Lambda \in \Omega(m)$, что $Q_k(T, h_k) \geq 1$ для всех $k \in \Lambda$.

Доказательство. Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(t, h_k) &= \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} \alpha_k(t) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \lambda(v(s), \psi(t, s), h_k) ds \geq \\ &\geq \alpha(t) \frac{1}{C_n^m} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| \sum_{\Lambda \in \Omega(m)} \left(\min_{k \in \Lambda} \lambda(v(s), \psi(t, s), h_k) \right) ds \geq \alpha(t) \frac{\delta_1}{C_n^m} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу предположения 2, для момента T такого, что

$$\alpha(T) \frac{\delta_1}{C_n^m} \int_{t_0}^T |\varphi_{l-1}(T, s)| ds \geq 1,$$

и некоторого $\Lambda \in \Omega(m)$ выполнены неравенства $Q_k(T, h_k) \geq 1$ для всех $k \in \Lambda$. $\square$

Пусть

$$\theta_1 = \min\{t \geq t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{d \in D_1} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(t, h_k) \geq 1\}.$$

Из леммы 3 следует, что $\theta_1 < \infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1, 2 и условие 1. Тогда в игре Γ возможна m -кратная поимка.

Доказательство. По формуле Коши для всех $t \geq t_0$ решение задачи (2.1) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s)(u_i(s) - v(s)) ds.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq T_1 = \theta_1 + \Delta_1$ — произвольное допустимое управление убегающего E и $t_i \geq t_0$ — наименьший корень функции

$$F_i(t) = 1 - \alpha_i(\tau_i) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda(v(s), \psi(\tau_i, s), \alpha_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i)) ds,$$

где $\tau_i \in [\theta_1, T_1] = [\theta_1, \theta_1 + \Delta_1]$ выбраны так, чтобы выполнялось утверждение 2) леммы 1, то есть $\alpha_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i) \in D(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$. В силу определения момента θ_1 имеем

$$\min_{\Lambda \in \Omega(m)} \max_{k \in \Lambda} F_k(\theta_1) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(\theta_1, \alpha_k(\tau_k) \xi_k(\tau_k)) \leq 0,$$

значит, найдется множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что $t_k \leq \theta_1 \leq \tau_k$ для всех $k \in \Lambda_0$.

Зададим управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda(v(t), \psi(\tau_i, t), \alpha_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i)) \psi(\tau_i, t) \alpha_i(\tau_i) \xi_i(\tau_i), & t \in [t_0, t_i^*], \\ v(t), & t \in (t_i^*, T_1], \text{ где } t_i^* = \min\{t_i, \tau_i\}. \end{cases}$$

Тогда

$$z_k(\tau_k) = \xi_k(\tau_k) \left(1 - \alpha_k(\tau_k) \int_{t_0}^{\tau_k} |\varphi_{l-1}(\tau_k, s)| \lambda(v(s), \psi(\tau_k, s), \alpha_k(\tau_k) \xi_k(\tau_k)) ds \right) = \xi_k(\tau_k) F_k(\tau_k) = 0$$

для всех $k \in \Lambda_0$. □

Предположение 3. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора, и $\varphi_{l-1}(t, s)$ такова, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(t, s)| ds = \infty.$$

Условие 2. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_n^0 \in [t_0, \infty)$ такие, что

$$0 \in \text{Intco}\{\xi_k(\tau_k^0), k \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - m - 1).$$

Следствие 1. Пусть выполнены предположение 3 и условие 2. Тогда в игре Γ возможна m -кратная поимка.

Доказательство. Полагая $\alpha_i(t) = 1$, $\xi_i^1(t) = \xi_i(t)$, получаем выполнимость всех условий теоремы 1. □

Замечание 1. Предположения 1, 2, 3 выполнены, в частности, если $a_{q+1}(t)$ являются постоянными функциями, то есть $a_{q+1}(t) = a_{q+1}$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\rho^l + a_1 \rho^{l-1} + a_2 \rho^{l-2} + \dots + a_l \rho = 0 \tag{2.2}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Следствие 2. Пусть функции $a_{q+1}(t)$ являются постоянными, все корни ρ уравнения (2.2) являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие 2. Тогда в игре Γ возможна m -кратная поимка.

Теорема 2. Пусть функции $a_{q+1}(t)$ являются постоянными, все корни ρ уравнения (2.2) являются простыми и чисто мнимыми, $n \geq \nu = 2$. Тогда в игре Γ возможна $(n-1)$ -кратная поимка из любых начальных позиций.

Доказательство. При $n = 2$ утверждение теоремы доказано [5]. Пусть утверждение выполнено при всех $n \leq n_0$. Докажем, что при $n = n_0 + 1$ в игре Γ возможна n_0 -кратная поимка из любых начальных позиций. В силу индуктивного предположения преследователи P_k , $k = 1, 2, \dots, n_0$, осуществляют $(n_0 - 1)$ -кратную поимку. Затем оставшиеся (не осуществившие поимку) два преследователя P_j , где $j \in \{1, 2, \dots, n_0\}$, и P_{n_0+1} могут поймать убегающего. Таким образом, все преследователи осуществляют n_0 -кратную поимку. □

§ 3. Достаточные условия нестрогой одновременной многократной поимки

Условие 3. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \text{Intco}\{\xi_k^1(\tau_0), k \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - m - 1).$$

Лемма 4. Пусть выполнены предположение 1 и условие 3. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_2 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, для которых справедливы утверждения: 1) для всех $K \in \Omega(n - m - 1)$ и $h_i \in D(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$ выполнено включение $0 \in \text{Intco}\{h_k, k \in K\}$; 2) для всех $t \geq t_0$ найдется момент $\tau \in [t, t + \Delta_2)$, что $\alpha_i(\tau)\xi_i(\tau) \in D(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1. Выберем значения $\varepsilon_2 > 0$ и $\Delta_2 > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 4. Введем обозначения

$$D_2 = D(\xi_1^1(\tau_0), \varepsilon_2) \times D(\xi_2^1(\tau_0), \varepsilon_2) \times \dots \times D(\xi_n^1(\tau_0), \varepsilon_2),$$

$$\delta_2 = \min_{d \in D_2} \min_{\psi \in \{1, -1\}} \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in K} \lambda(v, \psi, h_k).$$

Лемма 5. Пусть выполнено условие 3. Тогда $\delta_2 > 0$.

Лемма 6. Пусть выполнены предположения 1, 2 и условие 3. Тогда существует такой момент $T > t_0$, что для каждого допустимого управления $v(t)$ и $d \in D_2$ найдется такое множество $\Lambda \in \Omega(m)$, что $Q_k(T, h_k) \geq 1$ для всех $k \in \Lambda$.

Доказательство лемм 5, 6 проводится аналогично доказательству лемм 2, 3 соответственно. Пусть

$$\theta_2 = \min\{t \geq t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{d \in D_2} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(t, h_k) \geq 1\}.$$

Из леммы 6 следует, что $\theta_2 < \infty$.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1, 2 и условие 3. Тогда в игре Γ возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка.

Доказательство. По формуле Коши для всех $t \geq t_0$ решение задачи (2.1) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s)(u_i(s) - v(s)) ds.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq T_2 = \theta_2 + \Delta_2$ — произвольное допустимое управление убегающего E и $t_i \geq t_0$ — наименьший корень функции

$$F_i(t) = 1 - \alpha_i(\tau) \int_{t_0}^t |\varphi_{l-1}(\tau, s)| \lambda(v(s), \psi(\tau, s), \alpha_i(\tau)\xi_i(\tau)) ds,$$

где $\tau \in [\theta_2, T_2) = [\theta_2, \theta_2 + \Delta_2)$ выбран так, чтобы выполнялось утверждение 2) леммы 4, то есть $\alpha_i(\tau)\xi_i(\tau) \in D(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$. В силу определения момента θ_2 имеем

$$\min_{\Lambda \in \Omega(m)} \max_{k \in \Lambda} F_k(\theta_2) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{k \in \Lambda} Q_k(\theta_1, \alpha_k(\tau)\xi_k(\tau)) \leq 0,$$

значит, найдется множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$, что $t_k \leq \theta_2 \leq \tau$ для всех $k \in \Lambda_0$.

Зададим управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda(v(t), \psi(\tau, t), \alpha_i(\tau)\xi_i(\tau))\psi(\tau, t)\alpha_i(\tau)\xi_i(\tau), & t \in [t_0, t_i^*], \\ v(t), & t \in (t_i^*, T_2], \text{ где } t_i^* = \min\{t_i, \tau\}. \end{cases}$$

Тогда

$$z_k(\tau) = \xi_k(\tau) \left(1 - \alpha_k(\tau) \int_{t_0}^{\tau} |\varphi_{l-1}(\tau, s)| \lambda(v(s), \psi(\tau, s), \alpha_k(\tau) \xi_k(\tau)) ds \right) = \xi_k(\tau) F_k(t_k) = 0$$

для всех $k \in \Lambda_0$. □

Условие 4. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \text{Intco}\{\xi_k(\tau_0), k \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - m - 1).$$

Следствие 3. Пусть выполнены предположение 3 и условие 4. Тогда в игре Γ возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка.

Доказательство. Полагая $\alpha_i(t) = 1$, $\xi_i^1(t) = \xi_i(t)$, получаем выполнимость всех условий теоремы 3. □

Условие 5. Начальные позиции участников таковы, что

$$0 \in \text{Intco}\{Z_k^0, k \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - m - 1).$$

Следствие 4. Пусть выполнены предположение 3 и условие 5. Тогда в игре Γ возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка.

Доказательство. Пусть $\tau_0 = t_0$, тогда $\xi_i(\tau_0) = \xi_i(t_0) = Z_i^0$ и условие 4 выполнено. Применим следствие 3. □

Следствие 5. Пусть функции $a_{q+1}(t)$ являются постоянными, все корни ρ уравнения (2.2) являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие 4 или условие 5. Тогда в игре Γ возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка.

§ 4. Необходимые и достаточные условия одновременной многократной поимки

Теорема 4 (см. [7]). Пусть $l = 1$, $a_1(t) = 0$. Тогда в игре Γ возможна одновременная m -кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие 5.

§ 5. Примеры

Пример 1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_1 6 лиц: преследователей $P_1, \dots, P_5$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\ddot{z}_i + z_i = u_i - v, \\ t_0 = 0, \quad Z^0 = Z_i^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z^1 = Z_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Тогда корни уравнения (2.2), имеющего вид

$$\rho^2 + 1 = 0,$$

равны $\pm \iota$ (ι — мнимая единица) и предположения 1, 2, 3 выполнены. Здесь

$$\varphi_0(t, 0) = \cos t, \quad \varphi_1(t, 0) = \sin t, \quad \xi_i(t) = Z^0 \cos t + Z^1 \sin t.$$

Отметим, что условие 3, а следовательно, и полученные в этой работе достаточные условия нестрогой одновременной m -кратной поимки не выполнены уже при $m = 1$, так как при любых $\alpha_i(t) > 0$

$$\text{Intco}\{\alpha_i(t)\xi_i(t), i = 1, \dots, 5\} = \emptyset \text{ для всех } t \in [0, \infty).$$

Условие 2 выполнено, например, выберем $\tau_i^0 = \frac{2\pi i}{5}$, тогда

$$\xi_i(\tau_i^0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{5} \\ \sin \frac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

образуют правильный пятиугольник с центром в начале координат. Проверяя, получаем, что условие 2 выполнено при $m = 2$. Следствие 2 влечет возможность двукратной поимки в игре Γ_1 . Но из теоремы 2 следует более сильное

Утверждение 1. В игре Γ_1 возможна четырехкратная поимка.

Пример 2. В $\mathbb{R}^\nu$ ($\nu \geq 2$) рассмотрим игру Γ_2 $n + 1$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$z_i^{(6)} + 14z_i^{(4)} + 49\ddot{z}_i + 36z_i = u_i - v.$$

Тогда корни уравнения (2.2), имеющего вид

$$\rho^6 + 14\rho^4 + 49\rho^2 + 36 = 0,$$

равны $\pm\iota$, $\pm 2\iota$, $\pm 3\iota$ и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 2. 1) Если выполнено условие 3 или условие 4, или условие 5, то в игре Γ_2 возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка; 2) если выполнено условие 1 или условие 2, то в игре Γ_2 возможна m -кратная поимка; 3) если $n \geq \nu = 2$, то в игре Γ_2 возможна $(n - 1)$ -кратная поимка из любых начальных позиций.

Пример 3. В $\mathbb{R}^\nu$ ($\nu \geq 2$) рассмотрим игру Γ_3 $n + 1$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i + \frac{\sin t}{2 + \cos t} z_i = u_i - v.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \frac{2 + \cos t}{2 + \cos s}, \quad \xi_i(t) = \frac{2 + \cos t}{2 + \cos t_0} Z_i^0$$

и предположения 1, 2, 3 выполнены.

Утверждение 3. Если выполнено условие 5, то в игре Γ_3 возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка.

Пример 4. В $\mathbb{R}^\nu$ ($\nu \geq 2$) рассмотрим игру Γ_4 $n + 1$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i + \left(\frac{1}{t} + \frac{\sin t}{2 + \cos t} \right) z_i = u_i - v, \quad t_0 > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, s) &= \frac{s(2 + \cos t)}{t(2 + \cos s)}, \quad \xi_i(t) = \frac{t_0(2 + \cos t)}{t(2 + \cos t_0)} Z_i^0, \\ \alpha(t) &= \alpha_i(t) = t, \quad \xi_i^1(t) = \frac{t_0}{2 + \cos t_0} (2 + \cos t) Z_i^0 \end{aligned}$$

и предположения 1, 2 выполнены. Отметим, что предположение 3 не выполнено. В качестве τ_0 в условии 3 возьмем t_0 , тогда $\xi_i^1(\tau_0) = \xi_i^1(t_0) = t_0 Z_i^0$.

Утверждение 4. Если начальные позиции участников таковы, что выполнено условие 5, то в игре Γ_4 возможна нестрогая одновременная m -кратная поимка.

Пример 5. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_5 6 лиц: преследователей $P_1, \dots, P_5$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{5} \\ \sin \frac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный пятиугольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя, получаем, что при $m \leq 2$ условие 1 выполнено, а при $m \geq 3$ не выполнено.

Утверждение 5. В игре Γ_5 возможна одновременная двукратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.

Пример 6. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_6 8 лиц: преследователей $P_1, \dots, P_7$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{7} \\ \sin \frac{2\pi i}{7} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 7, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 6. В игре Γ_6 возможна одновременная трехкратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.

Обобщая результаты игр Γ_5 и Γ_6 , рассмотрим следующий пример.

Пример 7. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру Γ_7 $2 + 2m$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_{1+2m}$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1+2m} \\ \sin \frac{2\pi i}{1+2m} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 1 + 2m, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 7. В игре Γ_7 возможна одновременная m -кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.

Пример 8. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим игру Γ_8 $2 + 3m$ лиц: преследователей $P_1, \dots, P_{1+3m}$ и убегающего E вида (1.1), (1.2), (1.3), где соотношения (2.1) имеют вид

$$\dot{z}_i = u_i - v, \quad t_0 = 0,$$

$$X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi i}{1+2m} \\ \sin \frac{2\pi i}{1+2m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, 1 + 2m, \quad X_k^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k = 2 + 2m, \dots, 1 + 3m, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 8. В игре Γ_8 возможна одновременная m -кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
2. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 197 с.
3. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61, вып. 5. — С. 747–754.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 380 с.
5. Благодатских А.И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками // Известия ин-та математики и информатики. — Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 2005. — № 2. — С. 3–22.
6. Благодатских А.И. Групповое преследование в нестационарном примере Л.С. Понтрягина // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 1. — С. 39–44.
7. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 1. — С. 54–59.

Поступила в редакцию 10.10.08

A. I. Blagodatskikh

Multiple capture in a Pontriagin's problem

Sufficient conditions are obtained for the multiple capture in Pontriagin's problem with equal possibilities for all players.

Keywords: differential games, group pursuit, capture, multiple capture, Pontriagin's problem.

Mathematical Subject Classifications: 34A30, 49J15, 91A23

Благодатских Александр Иванович,
к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений,
Удмуртский государственный университет,
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: aiblag@mail.ru