N. Yu. Lukoyanov, Stable functionals in control problems with hereditary information,
Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2008, Issue 2, 77–80

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.67.100

April 26, 2023, 16:24:34

УДК 517.977

© Н. Ю. Лукоянов

**СТАБИЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ЗАДАЧАХ
УПРАВЛЕНИЯ С НАСЛЕДСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ¹**

Для задач управления наследственными динамическими системами изучаются условия, определяющие u -стабильные функционалы от истории движения.

Ключевые слова: наследственные динамические системы, управление по принципу обратной связи с памятью, дифференциальные игры систем с последствием, стабильные функционалы.

Согласно теоретико-игровому подходу [1–4] одним из центральных элементов при построении стратегий эффективного управления наследственными динамическими системами в условиях помех или конфликта является понятие u - и v -стабильных функционалов от истории движения. Ниже приводятся различные по форме, но эквивалентные по существу критерии u -стабильности таких функционалов.

Рассмотрим задачу управления, описываемую уравнением движения

$$\dot{y}(\tau) = f(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)), \quad t \leq \tau \leq T, \quad y(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad u(\tau) \in \mathbb{P}, \quad v(\tau) \in \mathbb{Q}, \quad (1)$$

начальным условием

$$y(\tau) = x(\tau) \text{ при } t_* \leq \tau \leq t, \quad t \in [t_0, T], \quad x(\cdot) \in C \quad (2)$$

и показателем качества

$$\gamma = \sigma(y(\cdot)) - \int_t^T h(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Здесь τ — текущее время, $y(\tau)$ и $\dot{y}(\tau) = dy(\tau)/d\tau$ — значение фазового вектора и скорость его изменения в момент τ , $y(\cdot) = \{y(\tau), t_* \leq \tau \leq T\}$, $u(\tau)$ — текущее воздействие управления, $v(\tau)$ — воздействие помехи, $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ — компакты конечномерных пространств, t_* , t_0 и T ($t_* < t_0 < T$) — фиксированные моменты времени, t — момент начала процесса управления, C — пространство непрерывных n -мерных вектор-функций, определенных на $[t_*, T]$. Цель управления — доставить показателю (3) как можно меньшее значение. Предполагается, что отображения $f : [t_*, T] \times C \times \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}^n$,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, гранта Президента РФ МД-6133.2006.1 и РФФИ (грант 06-01-00436).

$h : [t_*, T] \times C \times \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ и $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$ непрерывны. При этом отображения f и h являются *неупреждающими* по $\tau, y(\cdot)$: если $x(\tau) = y(\tau)$ при $t_* \leq \tau \leq t$, то $f(t, x(\cdot), u, v) = f(t, y(\cdot), u, v)$, $h(t, x(\cdot), u, v) = h(t, y(\cdot), u, v)$. Кроме того, существует такая константа $c > 0$, что

$$\|f(\tau, y(\cdot), u, v)\| + |h(\tau, y(\cdot), u, v)| \leq \rho(\tau, y(\cdot)) = \left(1 + \max_{t_* \leq \xi \leq \tau} \|y(\xi)\|\right)c$$

и для всякого компакта $D \subset C$ существует $\lambda = \lambda(D) > 0$ такое, что для всех $y(\cdot), z(\cdot) \in D$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|f(\tau, y(\cdot), u, v) - f(\tau, z(\cdot), u, v)\| + |h(\tau, y(\cdot), u, v) - h(\tau, z(\cdot), u, v)| \leq \\ & \leq \lambda \left(\|y(\tau) - z(\tau)\| + \sum_{j=1}^M \|y(\tau - \vartheta_j) - z(\tau - \vartheta_j)\| + \sqrt{\int_{t_*}^{\tau} \|y(\xi) - z(\xi)\|^2 d\xi} \right), \end{aligned}$$

где $0 < \vartheta_j \leq t_0 - t_*$ ($j = 1, M$) — сосредоточенные запаздывания времени.

Далее будем рассматривать непрерывные *неупреждающие* функционалы $\varphi = \varphi(t, x(\cdot))$, $t \in [t_*, T]$, $x(\cdot) \in C$ при условии $\varphi(T, x(\cdot)) \geq \sigma(x(\cdot))$.

О п р е д е л е н и е. Функционал φ называем *стабильным* (*u-стабильным* в терминологии [1–3]), если для любых $t \in [t_0, T]$, $x(\cdot) \in C$, $\tau^* \in (t, T]$ и любой измеримой по Борелю функции $v[\cdot] : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{Q}$ дифференциальное включение

$$(\dot{y}(\tau), \dot{\eta}(\tau)) \in \text{co} \left\{ \left(f(\tau, y(\cdot), u, v[u]), h(\tau, y(\cdot), u, v[u]) \right) \mid u \in \mathbb{P} \right\}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию (2), равенству $\eta(t) = \varphi(t, x(\cdot))$ и неравенству $\eta(\tau^*) \geq \varphi(\tau^*, y(\cdot))$.

Здесь символ «co» означает выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Стабильные функционалы замечательны тем (см. [1–3, 8]), что, управляя системой (1), (2) на основе экстремального сдвига по такому функционалу φ , можно с наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ обеспечить неравенство

$$\gamma \leq \varphi(t, x(\cdot)) + \varepsilon, \quad (4)$$

какова бы ни была реализация помехи $v(\cdot)$.

Через $\text{Lip}(t, x(\cdot))$ обозначим множество функций $y(\cdot) \in C$, удовлетворяющих (2) и липшицевых на $[t, T]$; через $\text{Lip}_K(t, x(\cdot))$ — множество таких $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$, которые на $[t, T]$ удовлетворяют условию Липшица с константой $K > 0$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначаем скалярное произведение.

Непрерывный неупреждающий функционал ψ называем *коинвариантно гладким*, если для любых $t \in [t_0, T]$, $x(\cdot) \in C$ и $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$ имеет место равенство

$$\psi(\tau, y(\cdot)) - \psi(t, x(\cdot)) = (\tau - t)\partial_t \psi + \langle y(\tau) - x(t), \nabla \psi \rangle + o_y(\tau - t), \quad \tau \in (t, T],$$

где величины $\partial_t \psi = \partial_t \psi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla \psi = \nabla \psi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ непрерывны и не зависят от выбора $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$, а бесконечно малая o_y может зависеть от этого выбора, $o_y(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. В терминологии [5] величины $\partial_t \psi$, $\nabla \psi$ представляют собой коинвариантные производные функционала ψ , в терминологии [6] — Слю-производные.

Пусть $\mathbb{F}$ — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, $[\mathbb{F}]^\varepsilon$ — его замкнутая ε -окрестность. Положим

$$d^-\{\psi(t, x(\cdot)) | \mathbb{F}\} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{y(\cdot) \in \Omega_\varepsilon} \liminf_{\tau \rightarrow t+0} \frac{\psi(\tau, y(\cdot)) - \psi(t, x(\cdot))}{\tau - t},$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot)) : \dot{y}(\tau) \in [\mathbb{F}]^\varepsilon \text{ п. в. } \tau \in [t, T] \right\};$$

$$H(t, x(\cdot), s) = \min_{u \in \mathbb{P}} \max_{v \in \mathbb{Q}} [\langle s, f(t, x(\cdot), u, v) \rangle - h(t, x(\cdot), u, v)];$$

$$\mathbb{B}(t, x(\cdot)) = \left\{ f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \leq \rho(t, x(\cdot)) \right\}.$$

Теорема 1. Для непрерывного неупреждающего функционала φ следующие условия эквивалентны:

(а) для любых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$ и $s \in \mathbb{R}^n$ найдется такая функция $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$, что $\|\dot{y}(\tau)\| \leq \rho(\tau, y(\cdot))$ при почти всех $\tau \in [t, T]$ и

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) \leq \int_t^\tau \langle \dot{y}(\xi), s \rangle - H(\xi, y(\cdot), s) d\xi, \quad \tau \in [t, T];$$

(б) для любых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$ и $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$d^-\{\varphi(t, x(\cdot)) - \langle s, x(t) \rangle | \mathbb{B}(t, x(\cdot))\} + H(t, x(\cdot), s) \leq 0;$$

(с) для любого неупреждающего коинвариантно гладкого функционала ψ всякий раз, когда при некоторых $t \in [t_0, T)$, $x(\cdot) \in C$ и $K > \rho(t, x(\cdot))$ вдоль функций $y(\cdot) \in \text{Lip}_K(t, x(\cdot))$ разность $\varphi - \psi$ достигает на отрезке $[t, T]$ локальный минимум в точке t , выполняется неравенство

$$\partial_t \psi(t, x(\cdot)) + H(t, x(\cdot), \nabla \psi(t, x(\cdot))) \leq 0.$$

Согласно [7] стабильные функционалы φ удовлетворяют условию (а). В [8] показано, что по функционалу φ , удовлетворяющему условию (а), можно построить стратегию управления, гарантирующую неравенство (4). Таким образом, опираясь на условие (а), можно говорить о функционалах, стабильных относительно класса систем (1)–(3) с одним и тем же

гамильтонианом H . Это условие характеризует стабильные функционалы как *верхние минимаксные решения* [4, 8] следующего уравнения типа Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными:

$$\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + H(t, x(\cdot), \nabla \varphi(t, x(\cdot))) = 0.$$

Согласно подходу [9, 10] условие (с) позволяет интерпретировать стабильные функционалы как *верхние вязкостные решения* этого уравнения. Условия (а) и (с) носят нелокальный характер. Условие (b) представляет их выражение в инфинитезимальной форме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Осипов Ю. С. Дифференциальная игра наведения для систем с последствием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 1. С. 123–131.
4. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.
5. Ким А. В. i -гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.
6. Aubin J. P., Haddad G. History path dependent optimal control and portfolio valuation and management // Positivity. 2002. Vol. 6. P. 331–358.
7. Lukoyanov N. Yu. Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci -derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. Vol. 8, № 3. P. 365–397.
8. Лукоянов Н. Ю. Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последствием // Труды ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 108–118.
9. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, № 1. P. 1–42.
10. Soner H. M. On the Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Banach spaces // J. Optim. Theory and Appl. 1988. Vol. 57, № 3. P. 429–437.

Поступила в редакцию 05.02.08

N. Yu. Lukoyanov

Stable functionals in control problems with hereditary information

The paper presents conditions that determine the u -stable functionals of the history of motion in control problems of hereditary dynamical systems.

Лукоянов Николай Юрьевич
Институт математики
и механики УрО РАН
620219, Россия, г. Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: nyul@imm.uran.ru