E. A. Panasenko, L. I. Rodina, E. L. Tonkov, Absorption, nonwandering, and recurrence of the attainable set of a controllable system, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 97–104

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.173.137.237

April 26, 2023, 12:48:48

УДК 517.911/517.93

© *Е. А. Панасенко, Л. И. Родина, Е. Л. Тонков*

ПОГЛОЩАЕМОСТЬ, НЕБЛУЖДАЕМОСТЬ И РЕКУРРЕНТНОСТЬ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ¹

Исследуются условия, при которых множество достижимости управляемой системы поглощается заданным множеством, обладает свойством неблуждаемости, рекуррентности или эргодичности.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, достижимость, инвариантность, неблуждаемость, рекуррентность, эргодичность.

Введение

Пусть (Σ, h^t) — фиксированная топологическая динамическая система² с компактным фазовым пространством Σ , $f(\sigma, x, u)$ — непрерывная функция переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая локальному условию Липшица по переменной x равномерно относительно (σ, u) на множестве $\Sigma \times U$, где U — заданное компактное множество в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = \int_U f(h^t \sigma, x, u) \eta_t(du), \quad (0.1)$$

где η_t — допустимое управление³ и отвечающее системе (0.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \text{co } f(\sigma, x, U). \quad (0.2)$$

Здесь $\text{co } A$ — замыкание выпуклой оболочки множества A .

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 07-01-00305 и 06-01-00258).

²То есть h^t — однопараметрическая группа преобразований фазового пространства Σ в себя, непрерывная по (t, σ) (см. [1, 2]).

³Функция $t \rightarrow \eta_t$ называется допустимым управлением, если при каждом t η_t — вероятностная мера Радона с носителем в U и для любой непрерывной функции $a(u)$, функция $t \rightarrow \int_U a(u) \eta_t(du)$ измерима по Лебегу (см. [3, 4] и библиографию в [4]).

Введём в рассмотрение метрическое пространство $\Omega = \Sigma \times \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, где $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа dist . Обозначим далее $A(t, \omega)$, где $\omega = (\sigma, X) \in \Omega$, $t \geq 0$, *множество достижимости*⁴ системы (0.1) в момент времени t из начального множества X . В силу высказанных предположений, *найётся такое $\varepsilon > 0$, что при всех $t \in [0, \varepsilon)$ множество достижимости существует, компактно при каждом t и непрерывно по (t, ω)* . Кроме того, $A(t, \omega)|_{t=0} = X$ и $A(t+s, \omega) = A(t, h^s \sigma, A(s, \omega))$ при всех допустимых t и s . Поэтому, если каждое решение включения (0.2) существует при всех $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, то функция $g^t : \Omega \rightarrow \Omega$, определенная равенством $g^t \omega = (h^t \sigma, A(t, \omega))$, задаёт полупоток на Ω и, следовательно, пара (Ω, g^t) образует топологическую динамическую систему. Эта динамическая система служит *расширением* (см. [2]) системы (Σ, h^t) .

§ 1. Статистическая теорема сравнения

Пусть задана непрерывная функция $\mathbb{A} : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ переменных (t, ω) , $\omega = (\sigma, X)$, удовлетворяющая условиям⁵

$$\mathbb{A}(t, \omega)|_{t=0} = X, \quad \mathbb{A}(t+s, \omega) = \mathbb{A}(t, h^s \sigma, \mathbb{A}(s, \omega)) = \mathbb{A}(t, g^s \omega), \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

О п р е д е л е н и е 1. Фиксируем $X_0 \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, и для каждого $X \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и всех $\sigma \in \Sigma$ введём в рассмотрение характеристику

$$\text{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \omega) \subseteq \mathbb{A}(t, \omega_0)\}}{\vartheta}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0), \quad (1.2)$$

которую будем называть *относительной частотой поглощения* (relation absorption frequency) множества достижимости $A(t, \omega)$ множеством $\mathbb{A}(t, \omega_0)$.

Пусть $\mathfrak{M}(\sigma) \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in A(t, \omega_0)\}$, и для заданного $r > 0$ $\mathfrak{M}^r(\sigma) \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathbb{A}(t, \omega_0)) < r\}$, $\mathfrak{N}^r(\sigma) \doteq \mathfrak{M}^r(\sigma) \setminus \mathfrak{M}(\sigma)$.

Скалярную функцию $V(t, \sigma, x)$ переменных (t, σ, x) будем называть *функцией Ляпунова*, если она локально липшицева по (t, x) равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$; $V(t, \sigma, x) = 0$ для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех (t, x) на границе множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ и если $V(t, \sigma, x) > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r(\sigma)$ ⁶.

⁴Множество достижимости (attainable set) $A(t, \omega)$ системы (0.1) совпадает с сечением в момент времени $t \geq 0$ *интегральной воронки* $S(t, \omega)$ включения (0.2), когда начальное состояние $x(0)$ пробегает всё X .

⁵В качестве $\mathbb{A}$ может выступать интегральная воронка вспомогательного дифференциального включения $\dot{x} \in \mathbb{F}(h^t \sigma, x)$, играющего роль *включения сравнения*.

⁶Например, функция $V(t, \sigma, x) = \rho(x, \mathbb{A}(t, \omega_0))$, где $\rho(x, A)$ — расстояние от точки x до множества A , будет функцией Ляпунова, если она локально липшицева по (t, x) .

Далее, для локально липшицевой функции $V(t, \sigma, x)$ *обобщенной производной* в точке (t, x) по направлению вектора $(1, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий верхний предел

$$V^o(t, \sigma, x; q) \doteq \limsup_{(\tau, y, \varepsilon) \rightarrow (t, x, +0)} \frac{V(\tau + \varepsilon, \sigma, y + \varepsilon q) - V(\tau, \sigma, y)}{\varepsilon}, \quad (1.3)$$

а выражение $V_F^o(t, \sigma, x) \doteq \max_{q \in F(h^t \sigma, x)} V^o(t, \sigma, x; q)$ — *производной функции V в силу включения (0.2)*.

У с л о в и е 1. Для некоторого $r > 0$ существуют функция Ляпунова V и непрерывная функция $w : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ и всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r(\sigma)$ выполнено неравенство $V_F^o(t, \sigma, x) \leq w(h^t \sigma, V(t, \sigma, x))$ и для каждого $\sigma \in \Sigma$ существует предел

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t, \sigma) \leq 0\}}{\vartheta} = \varkappa(\sigma),$$

где $z(t, \sigma)$ — верхнее решение задачи

$$\dot{z} = w(h^t \sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Теорема 1. *Предположим, что X_0 фиксировано, $X \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, множество достижимости $A(t, \omega)$ определено при всех $t \geq 0$ и $\sigma \in \Sigma$ и выполнено условие 1. Тогда относительная частота поглощения удовлетворяет неравенству $\text{freq}(\omega) \geq \varkappa(\sigma)$.*

Следствие 1. ⁷ *Если выполнено условие 1 и верхнее решение задачи (1.4) неположительно при каждом $t \geq 0$, то для всякого $X \subset X_0$ и любого $\sigma \in \Sigma$ множество достижимости $A(t, \omega)$ определено при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $A(t, \omega)$ поглощается множеством $\mathbb{A}(t, \omega_0)$ при каждом $t \geq 0$.* ⁸

Метрической динамической системой [2, с. 156] называется четверка $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, где Ω — полное метрическое пространство; $\mathfrak{B}$ — сигма-алгебра борелевских множеств пространства Ω ; g^t — измеримый поток на Ω , μ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно g^t .

По заданной метрической динамической системе $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и включению (0.2) построим метрическую динамическую систему, служащую расширением исходной динамической системы. С этой целью будем предполагать, что выполнено следующее условие.

⁷Это следствие аналогично теореме 1 работы [5] (см. также [6]), в которой роль $\mathbb{A}(t, \omega_0)$ выполняет множество $M(h^t \sigma)$, заданное непрерывной функцией $M(\sigma)$, определённой на Σ и принимающей значения в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

⁸В другой терминологии это свойство называется *положительной инвариантностью* (при каждом σ) множества $\mathfrak{M}(\sigma)$ относительно решений включения (0.2).

У с л о в и е 2. Найдется непрерывная функция $M : \Sigma \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ такая, что замкнутое подмножество

$$\Omega_0 = \{(\sigma, X) : \sigma \in \Sigma, X \subseteq M(\sigma)\} \quad (1.5)$$

множества Ω *положительно инвариантно*⁹ относительно потока g^t .

Это условие позволяет нам рассматривать топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t) , являющуюся расширением топологической динамической системы (Σ, h^t) . Построим теперь метрическую динамическую систему $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ по системе $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и включению (0.2). Построим наименьшую сигма-алгебру $\mathfrak{B}$ множеств вида

$$\Sigma_0 \times M \doteq \{(\sigma, X) \in \Omega_0 : \sigma \in \Sigma_0, X \subseteq M(\sigma)\}.$$

Пусть λ_σ — инвариантная вероятностная мера на наименьшей сигма-алгебре $\mathfrak{A}_\sigma$ борелевских множеств, порожденной системой множеств из $\text{comp}(M(\sigma))$ при каждом фиксированном σ . Определим меру μ на $\mathfrak{B}$ равенством $\mu(\Sigma_0 \times M) \doteq \int_{\Sigma_0 \times M} d\nu d\lambda_\sigma$ для любых $\Sigma_0 \times M \in \mathfrak{B}$. Анало-

гично [7, с. 190] можно показать, что мера μ инвариантна относительно потока g^t ; заметим также, что μ является вероятностной мерой на $\mathfrak{B}$, согласованной с мерой ν , то есть $\mu(\Sigma_0 \times \mathbb{R}^n) = \nu(\Sigma_0)$ для всех $\Sigma_0 \in \mathfrak{A}$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 2 и система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ построена по системе $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и включению (0.2). Если

$$\nu(\sigma \in \Sigma : \kappa(\sigma) < 1) = 0, \quad \text{то} \quad \mu(\omega \in \Omega_0 : \text{freq}(\omega) < 1) = 0.$$

§ 2. Неблуждающее множество достижимости и минимальный центр притяжения

Напомним [1, гл. 5, § 5], что точка $\sigma \in \Sigma$ называется *неблуждающей* (nonwandering point), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\vartheta > 0$ найдутся такой момент времени $t \geq \vartheta$ и такая точка σ_0 , что $\rho_\Sigma(\sigma_0, \sigma) \leq \varepsilon$ и $\rho_\Sigma(h^t \sigma_0, \sigma) \leq \varepsilon$. Так как Σ компактно, то множество Σ_{nw} неблуждающих точек непусто, компактно и инвариантно относительно потока h^t .

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\omega = (\sigma, X) \in \Sigma_{nw} \times \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Множество достижимости $A(t, \omega)$ системы (0.1) называется *неблуждающим*, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\vartheta > 0$ найдутся точка $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$, удовлетворяющая условиям $\rho_\Sigma(\sigma_0, \sigma) \leq \varepsilon$, $\text{dist}(X_0, X) \leq \varepsilon$ и момент времени $t \geq \vartheta$ такие, что $\text{dist}(A(t, \omega_0), X) \leq \varepsilon$. Будем говорить также, что точка ω является *неблуждающей* и совокупность всех неблуждающих точек обозначим Ω_{nw} .

⁹Множество Ω_0 положительно инвариантно, если $g^t \omega \in \Omega_0$ для всех $\omega \in \Omega_0$ и $t \geq 0$; это эквивалентно включению $A(t, \omega) \subseteq M(h^t \sigma)$, $\omega \in \Omega_0$, $t \geq 0$. Условия положительной инвариантности см. [5, 6].

Теорема 3. Если выполнено условие 2, то множество Ω_{nw} неблуждающих точек, содержащихся в Ω_0 , непусто. Оно компактно и инвариантно относительно потока g^t . Следовательно, для каждого $\sigma \in \Sigma_{nw}$ найдется компактное подмножество $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ в $\text{compr}(M(\sigma))$ такое, что всякому $X \in \mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ отвечает неблуждающее множество достижимости $A(t, \sigma, X)$ системы (0.1).

Обозначим $\varrho(\sigma, \Sigma_{nw}) = \min_{\sigma_0 \in \Sigma_{nw}} \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0)$, $\varrho(X, \mathfrak{X}_{nw}) = \min_{X_0 \in \mathfrak{X}_{nw}} \text{dist}(X, X_0)$,
 $\varrho(\omega, \Omega_{nw}) = \max\{\varrho(\sigma, \Sigma_{nw}), \varrho(X, \mathfrak{X}_{nw})\}$, $\Omega_{nw}^\varepsilon = \{\omega \in \Omega : \varrho(\omega, \Omega_{nw}) \leq \varepsilon\}$.

Теорема 4. Предположим, что выполнено условие 2 и Ω_{nw} — множество всех неблуждающих точек пространства Ω_0 . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки ω пространства Ω_0 относительная частота пребывания движения $t \rightarrow g^t\omega$ в множестве Ω_{nw}^ε равна единице:

$$\text{freq}(\omega, \Omega_{nw}^\varepsilon) \doteq \overline{\lim}_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{1}{\vartheta} \int_0^\vartheta \chi_{\Omega_{nw}^\varepsilon}(g^t\omega) dt = 1,$$

где χ_E — характеристическая функция множества E . Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0) \in \Omega_0$ найдется такая неблуждающая точка $\omega = (\sigma, X)$, что

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \text{dist}(A(t, \omega_0), A(t, \omega)) \leq \varepsilon\}}{\vartheta} = 1.$$

Инвариантное замкнутое множество Ω_c называется *центром притяжения* (attraction center) движения $g^t\omega$ при $t \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ относительная частота пребывания точки ω в Ω_c^ε равна единице: $\text{freq}(\omega, \Omega_c^\varepsilon) = 1$. Если множество Ω_c не содержит собственного подмножества, также являющегося центром притяжения, то Ω_c называется *минимальным центром притяжения* (minimal attraction center) движения $t \rightarrow g^t\omega$ и обозначается $\Omega_{mc}(\omega)$ (см. [1, гл. 6, § 6]).

Теорема 5. Если выполнено условие 2, то для каждого $\omega \in \Omega_0$ существует минимальный центр притяжения $\Omega_{mc}(\omega)$ движения $t \rightarrow g^t\omega$.

§ 3. Рекуррентность множества достижимости и существование рекуррентных процессов системы (0.1)

Для произвольной топологической динамической системы (Σ, h^t) траекторию точки $\sigma \in \Sigma$ обозначим $\text{orb}(\sigma) \doteq \{h^t\sigma : t \in \mathbb{R}\}$, а замыкание траектории — $\overline{\text{orb}(\sigma)}$. Напомним, что в силу компактности Σ каждой

точке $\sigma \in \Sigma$ отвечает *омега-предельное множество* $\Sigma_0(\sigma)$, то есть множество всех частичных пределов (в метрике ρ_Σ) движения $t \rightarrow h^t\sigma$ при $t \rightarrow \infty$. Множество $\Sigma_0(\sigma)$ непусто, компактно, связно и инвариантно.

Теорема 6. Если выполнено условие 2, то для любого $\sigma_0 \in \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Sigma_0(\sigma)$ найдется такое множество $X_0 \subset M(\sigma_0)$, что множество достижимости $A(t, \omega_0)$ системы (0.1) определено при всех $t \in \mathbb{R}$, $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$.

Движение $t \rightarrow h^t\sigma$ называется *рекуррентным* по Биркгофу, если для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ множество $\Delta(\varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \vartheta} \rho_\Sigma(h^{t+\tau}\sigma, h^t\sigma) \leq \varepsilon\}$ относительно плотно¹⁰ на $\mathbb{R}$. Если множество $\Sigma_0 \subset \Sigma$ *минимально* (то есть замкнуто, инвариантно и не содержит истинного инвариантного подмножества), то любое движение в Σ_0 рекуррентно [1, гл. 5, § 6].

О п р е д е л е н и е 3. Множество достижимости $A(t, \omega)$ системы (0.1) называется *рекуррентным*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \vartheta} \text{dist}(A(t+\tau, \omega), A(t, \omega)) \leq \varepsilon\}$ относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Теорема 7. Пусть выполнено условие 2 и множество Σ минимально. Тогда всякой точке $\sigma_0 \in \Sigma$ отвечает множество $X_0 \subset M(\sigma_0)$ такое, что множество достижимости $A(t, \omega_0)$ рекуррентно.

В общем случае из рекуррентности $A(t, \omega)$ не следует существование рекуррентного сечения, между тем справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть выполнено условие 2 и множество Σ минимально. Тогда каждому $\sigma_0 \in \Sigma$ отвечает такое $\sigma \in \Sigma$, что включение (0.2) имеет хотя бы одно рекуррентное решение $x(t, \sigma) \in M(h^t\sigma)$, $t \in \mathbb{R}$.

§ 4. Эргодические системы

Рассмотрим метрическую динамическую систему $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, построенную в первом параграфе по системе $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, включению (0.2) и множеству (1.5). При этом мы предполагаем, что выполнено условие 2.

Динамическая система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ называется *эргодической* по отношению к мере μ (см. [1, с. 522]), если пространство Ω_0 нельзя представить как сумму двух измеримых инвариантных множеств положительной меры без общих точек, или иначе: если $A \subset \Omega_0$ инвариантно, измеримо и $\mu(A) > 0$, то $\mu(\Omega_0 \setminus A) = 0$. Таким образом, если система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ эргодическая, то мера всякого инвариантного измеримого множества из Ω_0 равна нулю или единице. Система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$ называется *строго эргодической*, если эргодическая мера на Ω_0 единственна. В силу теоремы

¹⁰ Δ относительно плотно на $\mathbb{R}$, если $\Delta \cap [t, t + \vartheta] \neq \emptyset$ для некоторого ϑ и всех t .

А. А. Маркова, примером строго эргодической динамической системы может служить система, в которой множество Ω_0 минимально относительно потока g^t и состоит из почти периодических движений [1, с. 531].

У с л о в и е 3. Найдется такая непрерывная функция M из Σ в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, что множество Ω_0 , определенное равенством (1.5), инвариантно относительно потока g^t , а функция $\mathbb{A}$, заданная условиями (1.1), *стационарна*¹¹ относительно потока g^t и для всех $\omega \in \Omega_0$ и $t \geq 0$ справедливо вложение $\mathbb{A}(g^t\omega) \subseteq M(h^t\sigma)$.

При условии 3 относительная частота поглощения множества достижимости $A(t, \omega)$ системы (0.1) множеством $\mathbb{A}(g^t\omega_0)$, где $\omega_0 = (\sigma, X_0(\sigma)) \subseteq \Omega_0$ и $X_0(\sigma)$ задано, запишется в виде (см. (1.2))

$$\text{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \omega) \subseteq \mathbb{A}(g^t\omega_0)\}}{\vartheta}, \quad \omega \in \Omega_0. \quad (4.1)$$

Далее, в предположениях этого параграфа в качестве функции V достаточно рассматривать функцию $(\sigma, x) \rightarrow V(\sigma, x)$, определенную на Ω_0 и не зависящую от времени t . Как и в § 1, для фиксированного компакта $X_0(\sigma) \subseteq M(\sigma)$ функцию $V(\sigma, x)$ будем называть функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M} \doteq \{(\sigma, x) : \sigma \in \Sigma, x \in \mathbb{A}(\omega_0)\}$, если $V(\sigma, x) \leq 0$ при всех $(\sigma, x) \in \mathfrak{M}$ и $V(\sigma, x) > 0$ при $(\sigma, x) \in \Omega_0 \setminus \mathfrak{M}$.

Производная V по направлению $(1, q)$ определяется равенством (1.3)

$$V^o(\sigma, x; q) \doteq \limsup_{(\tau, y, \varepsilon) \rightarrow (0, x, +0)} \frac{V(h^{\tau+\varepsilon}\sigma, y + \varepsilon q) - V(h^\tau\sigma, y)}{\varepsilon},$$

а производная V в силу (0.2) — равенством $V_F^o(\sigma, x) \doteq \max_{q \in F(\sigma, x)} V^o(\sigma, x; q)$.

Теорема 9. Пусть выполнено условие 3 и система $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, построенная по системе $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и включению (0.2), эргодическая. Пусть, далее, существуют функция Ляпунова $V: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывная функция $w: \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $V_F^o(\sigma, x) \leq w(\sigma, V(\sigma, x))$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Если неравенство

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t, \sigma) \leq 0\}}{\vartheta} > 0,$$

где $z(t, \sigma)$ — верхнее вправо решение задачи $\dot{z} = w(h^t\sigma, z)$, $z(0) = 0$, выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$ (в смысле меры ν), то относительная частота поглощения $\text{freq}(\omega)$, определенная равенством (4.1), равна единице для почти всех $\omega \in \Omega_0$ (в смысле меры μ).

¹¹Функция $\mathbb{A}$ переменных (t, ω) стационарна относительно потока g^t , если она представима в виде $(t, \omega) \rightarrow \mathbb{A}(g^t\omega)$, то есть задается функцией $\mathbb{A}(\omega)$ одной переменной ω .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ. 1949. 550 с.
2. Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З. Динамические системы-1 // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 1. М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР. 1985. 244 с.
3. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука. 1977. 623 с.
4. Иванов А. Г., Тонков Е. Л. Почти периодические управляемые процессы // Вестн. Тамб. ун-та. 2007. Т. 12, вып. 4. С. 456–459.
5. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений и функции Ляпунова // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 262.
6. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 859–860.
7. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука. 1980. 384 с.

Поступила в редакцию 25.02.08

E. A. Panasenko, L. I. Rodina, E. L. Tonkov

Absorption, nonwandering, and recurrence of the attainable set of a controllable system

The conditions are studied under which the attainable set of a controllable system can be absorbed in the given set or becomes nonwandering, recurrent, ergodic.

Панасенко Елена Александровна
Тамбовский государственный
университет
392000, Россия, г. Тамбов,
ул. Интернациональная, 33.
E-mail: panlena_t@mail.ru

Родина Людмила Ивановна
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: rdl@uni.udm.ru

Тонков Евгений Леонидович
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: eltonkov@udm.ru