T. L. Sabatulina, On the positiveness of the Cauchy function of some integro-differential equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 122–123

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.130.99

April 26, 2023, 16:33:31

УДК 517.929

© *Т. Л. Сабатулина*

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ КОШИ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Получены достаточные условия положительности функции Коши одного интегро-дифференциального уравнения. На их основе изучается асимптотическая устойчивость этого же уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, положительность функции Коши, асимптотическая устойчивость.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = - \int_{t-h(t)}^t k(t,s)x(s) ds, \quad x(t) = 0, \quad t < 0, \quad (1)$$

где функции $k(\cdot, s)$ и $h(\cdot)$ измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$, функция $k(t, \cdot)$ суммируема на каждом конечном отрезке. Дополнительно предположим, что $k(t, s) \geq 0$ при всех $\{t, s\} \in \mathbb{R}_+^2$ и $h(t) \geq 0$ при любом $t \in \mathbb{R}_+$.

Для уравнения (1) ставится задача получения эффективных признаков (в терминах параметров исходной задачи) положительности функции Коши. Обозначим $\rho(t) = \int_{t-h(t)}^t k(t,s) ds$. С помощью леммы о дифференциальном неравенстве [1, с. 65] получается следующая

Теорема 1. Если $\text{vraisup}_t \int_{t-h(t)}^t \rho(s) ds \leq \frac{1}{e}$, то функция Коши уравнения (1) положительна.

Если подчинить $k(t, s)$ более жёстким условиям, то оценку $1/e$ удаётся увеличить почти в два раза.

Теорема 2. Пусть ω — суммируемая на любом конечном отрезке функция, $k(t, s) \leq \omega(t)\omega(s)$ и $\text{vraisup}_t \int_{t-h(t)}^t \omega(s) ds \leq \sqrt{s_0(2-s_0)}$, где s_0 — корень уравнения $e^{-s} = 1 - s/2$. Тогда функция Коши уравнения (1) положительна.

Следствие 1 [2]. Пусть $\text{vraisup}_{t,s} k(t, s) = k$, $\text{vraisup}_t h(t) = h$ и выполнено неравенство $kh^2 \leq s_0(2-s_0)$, где s_0 — корень уравнения $e^{-s} = 1 - s/2$. Тогда функция Коши уравнения (1) положительна.

Если уравнение (1) автономно, то условия следствия 1 являются необходимыми и достаточными условиями положительности функции Коши.

Пусть функция Коши уравнения (1) положительна. Тогда, так как $x(t) = C(t, 0)x(0)$, любое решение уравнения (1) сохраняет знак. В силу (1) $\dot{x}(t)$ тоже сохраняет знак, то есть решение монотонно и ограничено, следовательно, предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$ существует. Этот предел не обязательно равен нулю, оказывается существенным разделение случаев $\rho \in L_1$ и $\rho \notin L_1$.

Теорема 3. Пусть $\rho \in L_1$. Тогда для любого положительного ε найдётся такое T , что при любых t, s , таких, что $t \geq s \geq T$, выполнено неравенство $|C(t, s) - 1| < \varepsilon$.

Из теоремы 3 следует, что при $\rho \in L_1$ уравнение (1) равномерно устойчиво, но не равномерно асимптотически устойчиво, а при всех s , начиная с s_0 , $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t, s) > 0$. Как показывают примеры, при $s < s_0$ специальным выбором параметров можно добиться, что в случае $\rho \in L_1$ уравнение (1) будет обладать свойством асимптотической устойчивости, но любое малое изменение параметров приводит к потере этого свойства.

Теорема 4 [2]. Пусть функция Коши уравнения (1) положительна и $\rho \notin L_1$. Тогда решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

* * *

1. Азбелев Н. В., Симонов. П. М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.
2. Sabatulina T. L. On the positiveness of the Cauchy function of integro-differential equations with bounded aftereffect // Functional differential equation. 2008. Vol. 3–4. P. 273–282.

Поступила в редакцию 14. 02. 08

T. L. Sabatulina

On the positiveness of the Cauchy function of some integro-differential equation

The paper presents the conditions of the positiveness of the Cauchy function of some integro-differential equation. Asymptotic stability of the equation is studied in terms of these results.

Сабатулина Татьяна Леонидовна
Пермский государственный
технический университет
614000, Россия, г. Пермь,
Комсомольский проспект, 29а
E-mail: sabatulina@do.pstu.ru