A. N. Sesekin, Yu. V. Fetisova, Dynamic systems with delay perturbed by impulses,
Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2008, Issue 2, 136–139

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.7.115

April 26, 2023, 13:10:55

УДК 517.917

© А. Н. Сесекин, Ю. В. Фетисова

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ,
ВОЗМУЩЕННЫЕ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ¹**

Работа посвящена формализации и описанию решений нелинейной системы функционально-дифференциальных уравнений, возмущенных импульсным воздействием. Также исследован вопрос о непрерывной зависимости решения от начальной функции.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, импульсное возмущение.

Введение

В работе рассматривается задача формализации понятия решения нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и последствием в фазовых координатах. Обзоры различных подходов к решению этой проблемы для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений содержатся в [1–4]. Среди более поздних публикаций отметим работу [5]. Основными подходами к проблеме формализации понятия решения являются следующие. Первый подход связан с подменой дифференциального уравнения интегральным, в котором интеграл по интегрирующей функции трактуется как интеграл Лебега–Стилтьеса или Перрона–Стилтьеса. Второй связан с формализацией операции умножения разрывной функции на обобщенную. Третий подход связан с определением решений с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Такой подход естественен с точки зрения теории управления [6], где импульсные управления часто представляют собой идеализированные процессы с большим изменением параметров за короткие промежутки времени. Кроме отмеченных подходов отметим формализацию импульсных систем, предложенную А. Д. Мышкисом и А. М. Самойленко, где непрерывная составляющая траектории задавалась с помощью обыкновенного дифференциального уравнения, а реакции импульсных воздействий на систему описывались с помо-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00445).

щью некоторых алгебраических уравнений, описывающих скачки траекторий. Эти же подходы могут быть применены при формализации решений и функционально-дифференциальных уравнений.

В работе [7] подход, основанный на замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации, развит на системы с постоянным запаздыванием. В данной работе этот подход развивается на системы с распределенным запаздыванием. В работе [8] подход А. Д. Мышкиса и А. М. Самойленко к системам с импульсным воздействием был распространен на функционально-дифференциальные уравнения.

§ 1. Определение решения и теорема существования

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \int_{-\tau}^0 h(x(t+s))dg(t, s)) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (1.1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (1.2)$$

где $x(t)$, $v(t)$ — соответственно n - и r -мерные вектор-функции времени, $h(x)$ — непрерывная вектор-функция размерности n , $g(t, s)$ — непрерывная функция, $f(t, x, y)$ — n -мерная вектор-функция, $B(t, x)$ — $n \times m$ матрица-функция, $\tau > 0$ — величина последействия, $\varphi(t)$ — начальная функция (начальное условие), заданная на $[t_0 - \tau, t_0]$. Предположим, что функции $f(t, x, y)$ и $B(t, x)$ в области $\Omega = [t_0, \vartheta] \times R^n \times R^n$ непрерывны по совокупности переменных, липшицевы по x и y с константой L и удовлетворяют следующим стандартным условиям:

$$\|f(t, x, y)\| \leq \kappa(1 + \|x\|), \quad \|B(t, x)\| \leq \kappa(1 + \|x\|) \quad (1.3)$$

для всех допустимых t, x и y .

Если $v(t)$ — абсолютно непрерывная вектор-функция, определенная на отрезке $[t_0, \vartheta]$, то существует [9] единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2).

В случае когда $v(t)$ — функция ограниченной вариации, производные в (1.1) необходимо понимать в обобщенном смысле [10]. Объясняется это следующим. Если функция $v(t)$ разрывна в некоторый момент времени, то система подвергается импульсному воздействию в этот момент. Следовательно, второй аргумент функции $B(t, x(t))$ оказывается разрывным и в слагаемом $B(t, x(t))\dot{v}(t)$ возникает некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную.

О п р е д е л е н и е 1. Аппроксимируемым решением системы (1.1) с начальным условием (1.2) назовем функцию ограниченной вариации $x(t)$,

являющуюся поточечным пределом на $[t_0, \vartheta]$ последовательности абсолютно непрерывных решений $x_k(t)$ этой системы, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящейся к вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора последовательности.

Будем предполагать, что начальная функция $\varphi(t)$ является функцией ограниченной вариации.

Теорема 1. Пусть функции $f(t, x, y)$ и $B(t, x)$ в области Ω удовлетворяют обозначенным выше условиям. Предположим также, что существуют непрерывные по x частные производные $\partial b_{ij}/\partial x_\nu$ элементов матрицы-функции $B(t, x)$, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{ij}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t, x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{il}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t, x),$$

$i = 1, 2, \dots, n$; $j, l = 1, 2, \dots, r$. Тогда для всякой вектор-функции ограниченной вариации $v(t)$ существует аппроксимируемое решение $x(t)$ задачи Коши (1.1), (1.2), которое удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\xi, x(\xi), \int_{-\tau}^0 h(x(\xi+s)) dg(\xi, s)) d\xi + \int_{t_0}^t B(\xi, x(\xi)) dv^c(\xi) + \\ + \sum_{t_i \leq t, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)),$$

где

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - z(0), \quad \dot{z}(\xi) = B(t, z(\xi)) \Delta v(t), \quad z(0) = x.$$

§ 2. Непрерывная зависимость от начальных условий

О п р е д е л е н и е 2. Пусть последовательность начальных функций $\varphi_k(t)$ поточечно сходится к функции $\varphi(t)$, $x_k(t)$ — последовательность аппроксимируемых решений системы (1.1), порожденная последовательностью $\varphi_k(t)$, а $x(t)$ — аппроксимируемое решение той же системы, соответствующее начальной функции $\varphi(t)$. Будем говорить, что решение $x(t)$ непрерывно зависит от начальной функции $\varphi(t)$, если $\forall t \in [t_0, \vartheta]$ $x_k(t)$ поточечно сходится к $x(t)$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть вектор-функция $f(t, x, y)$ и матрица-функция $B(t, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда аппроксимируемое решение $x(t)$ системы (1.1) непрерывно зависит от начальной функции $\varphi(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. Завалишин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
3. Zavalishchin S. T., Seseikin A. N. Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
4. Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Оптимизация динамических систем с импульсным управлением. М.: Наука, 2004.
5. Дерр В. Я., Кинзебулатов Д. М. Динамические обобщенные функции и проблема умножения // Известия вузов. Математика. 2007. № 5. С. 33–45.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.
7. Fetisova Y. V., Seseikin A. N. Discontinuous solutions of differential equations with time delay // WSEAS Transaction on Systems. 2005. Vol. 4, № 5. P. 487–492.
8. Анохин А. В. О линейных функционально-дифференциальных уравнениях с обобщенными возмущениями // Докл. АН СССР. Т. 286, №5. С. 1037–1040.
9. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 15.02.08

A. N. Seseikin, J. V. Fetisova

Dynamic systems with delay perturbed by impulses

The paper deals with formalization and description of solutions for the nonlinear system of functional-differential equations perturbed by impulses. The problem of continuous dependence on the initial function for such solutions is investigated.

Сесекин Александр Николаевич
Институт математики и механики
УрО РАН,
620219, Россия, Екатеринбург,
ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: seseikin@imm.uran.ru

Фетисова Юлия Валерьевна
Уральский государственный
технический университет – УПИ,
620002, Россия, Екатеринбург,
ул. Мира, 19
E-mail: j.v.fetisova@imm.uran.ru