Введение в анализ на метрических пространствах с мерой

Целью данного курса является краткое изложение современных методов негладкого анализа.

Особый акцент будет сделан на пространствах Соболева первого порядка на метрических пространствах с мерой. Далее (если останется время) мы рассмотрим понятие метрических пространств с мерой с ограниченной снизу кривизной Риччи в смысле Виллани— Лотта — Штурма.

В течение курса я надеюсь дать панорамный взгляд на основные результаты, полученные в указанных направлениях за последние 20 лет.

Курс будет легко доступен для студентов 3-4 курсов физико-математических специальностей. Предполагается наличие у слушателей знания основ теории меры и интеграла Лебега, а также элементарных свойств банаховых пространств. Остальное я буду по возможности напоминать в течение курса.

Примерная программа курса

1. Основы теории меры и интеграла (краткое напоминание). Меры на метрических пространствах. Слабая сходимость мер. Теоремы Прохорова и Улама. Интеграл Бохнера и пространства L_{p} банаховозначных отображений. Меры со свойством удвоения и их свойства.
2. Метрика Громова –Хаусдорфа. Сходимость метрических пространств с мерой с отмеченными точками по Громову—Хаусдорфу и ее основные свойства.
3. Липшицевы функции на метрических пространствах. Асимптотические константы Липшица. Верхние градиенты.
4. Пространства, допускающие неравенство Пуанкаре. Устойчивость неравенства Пуанкаре относительно сходимости по Громову—Хаусдорфу.
5. Свойства самоулучшаемости неравенства Пуанкаре. Теорема Зонга—Кейта.
6. Слабые верхние градиенты и пространства Соболева—Чигера. Равенство асимптотической константы Липшица и слабого верхнего градиента для липшицевых функций в случае полных метрических пространств с удваивающей мерой, которые допускают неравенство Пуанкаре.
7. Теорема Чигера, обобщающая теорему Радемахера на случай метрических пространств с мерой.
8. Кривые в метрических пространствах и тест-планы. Понятие p-модуля семейства кривых, примеры. Подход Амброзио—Джильи —Саваре к пространства Соболева и его связь с подходом Чигера.
9. Функционал энергии, его градиентный поток, Лапласиан. Функционал энтропии и пространства с ограниченной снизу кривизной Риччи в смысле Виллани—Лотта–Штурма с инфинитизимальной римановой структурой.