

Введение в теорию мартингалов

0. Условное математическое ожидание (достаточно знать только формулировки)
 - 0.1. Определение. Существование и единственность.
 - 0.2. Свойства условного математического ожидания.
 - 0.3. Вычисление $E(X | Y)$ в случае, когда величины X, Y обладают совместной плотностью.
 - 0.4. Теоремы о сходимости под знаком условного математического ожидания.
1. Основные факты о мартингалах
 - 1.1. Определение мартингала, субмартингала, супермартингала. Примеры. Разложение Дуба.
 - 1.2. Моменты остановки и марковские моменты. Определение. Примеры. Доказательство того, что момент пересечения уровня является марковским моментом.
 - 1.3. Теорема Дуба об остановке (доказательство для ограниченных моментов остановки).
 - 1.4. Локальные и обобщенные мартингалы, мартингальные преобразования. Теорема об эквивалентности (формулировка). Пример обобщенного мартингала, не являющегося мартингалом.
 - 1.5. Достаточное условие мартингальности локального мартингала.
2. Сходимость мартингалов
 - 2.1. Лемма Дуба о числе пересечений для субмартингала.
 - 2.2. Теорема Дуба о сходимости субмартингала, ограниченного в L^1 . Следствие о сходимости неположительного субмартингала.
 - 2.3. Теорема о сходимости равномерно интегрируемого субмартингала. Следствие о сходимости субмартингала, ограниченного в L^p , $p > 1$. Теорема Дуба об остановке для неограниченных моментов.
 - 2.4. Теорема Леви о сходимости условных математических ожиданий. Характеризация равномерно интегрируемых мартингалов.
3. Множества сходимости мартингалов
 - 3.1. Теорема о равенстве множества сходимости и множества ограниченности сверху субмартингала.
 - 3.2. Теорема о связи множества сходимости субмартингала и его компенсатора.
 - 3.3. Теорема о связи множества сходимости квадратично интегрируемого мартингала и его квадратической характеристики.
 - 3.4. Теорема о сходимости субмартингала с ограниченными скачками.
 - 3.5. Закон больших чисел для квадратично интегрируемых мартингалов.
4. Неравенства Дуба для мартингалов
 - 4.1. Неравенства Дуба для конечного временного горизонта.
 - 4.2. Неравенства Дуба для бесконечного временного горизонта.
 - 4.3. Неравенство Буркхольдера–Дэвиса (формулировка; доказательство для $p = 2$).
5. Мартингалы и плотности вероятностных мер
 - 5.1. Абсолютно непрерывные и эквивалентные вероятностные меры. Производная Радона–Никодима и ее свойства. Формула пересчета математических ожиданий и условных математических ожиданий.
 - 5.2. Последовательность плотностей сужений абсолютно непрерывных мер и ее свойства. Сходимость.

- 5.3. Локальная абсолютная непрерывность вероятностных мер. Теорема о сходимости последовательности плотностей. Разложение Лебега.
 - 5.4. Необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности и сингулярности локально абсолютно непрерывных вероятностных мер (в терминах Z_∞). Альтернатива Какутани.
 - 5.5. Необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности и сингулярности локально абсолютно непрерывных вероятностных мер (в терминах последовательности $\alpha_n = Z_n/Z_{n-1}$).
6. Замена меры
 - 6.1. Теорема Гирсанова для условно-гауссовых последовательностей
 - 6.2. Условие Новикова (доказательство для $1/2 + \varepsilon$).
 - 6.3. Преобразование Эшера (формулировка; доказательство одношагового варианта).
 - 6.4. Эквивалентная мартингальная мера в модели Кокса–Росса–Рубинштейна.
 - 6.5. Задача хеджирования платежного обязательства. Определение справедливой цены и ее вычисление с помощью мартингальных мер.