

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Весенний семестр 2023/2024 учебного года

Программа курса

«Введение в теорию моделей»

(лектор – Беклемишев Лев Дмитриевич)

Теория моделей является одной из центральных составляющих математической логики и имеет глубокие связи с несколькими разделами математики, прежде всего с алгеброй и алгебраической геометрией. В рамках курсов НОЦ теория моделей еще ни разу не читалась. Задача курса — восполнить этот пробел. Мы постараемся сделать этот курс богатым на примеры, демонстрирующие работу логических методов в конкретных ситуациях для различных классов структур. В финале курса будет изложен теоретико-модельный подход к комбинаторным независимым утверждениям на примере принципа Канамори-Макалуна, связанного с теорией Рамсея.

Курс рассчитан на студентов, прослушавших вводные курсы алгебры и математической логики.

Программа курса

1. Язык логики предикатов, модели, определимость. Классические примеры: элементарная геометрия, арифметика, стандартные алгебраические структуры.
2. Переводы и интерпретации. Внутренние модели. Интерпретации теорий, важнейшие примеры.
3. Теорема о компактности и ее применения. Элементарная эквивалентность. Теоремы Левенгейма-Скулема и Мальцева о понижении и повышении мощности. Нестандартные модели арифметики.
4. Элиминация кванторов. Признаки элиминации кванторов. Классические теории с элиминацией кванторов: плотные линейные порядки без первого и последнего элементов, делимые абелевы группы без кручения.
5. Полнота и категоричность теории в данной мощности.

6. Алгебраически замкнутые поля. Элиминация кванторов и ее следствия. Полнота и категоричность элементарной теории алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики в любой несчетной мощности.
7. Упорядоченные поля. Вещественное замыкание. Теорема Тарского-Зайденберга.
8. Типы, пространство типов. Изолированные типы и теорема об опускании типов.
9. Простые модели и счетно-категоричные теории. Теорема Рылль-Нардзевского.
10. Неразличимые элементы. Применение диагонально-неразличимых элементов для построения моделей арифметики Пеано. Принцип Канамори-Макалуна и его независимость от аксиом арифметики Пеано.