МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2024/2025 учебного года

Программа курса

«Универсальная алгебра и алгебраическая логика»

(лектор – Сперанский Станислав Олегович)

Цель курса — познакомить слушателей с универсальной алгеброй и её применениями в изучении семейств логических систем. Содержание курса можно условно разделить на три части:

I) элементы универсальной алгебры;

II) булевы алгебры и их представления;

III) алгебраическая семантика для неклассических логик.

I. Под (*абстрактной*) *алгеброй* понимают произвольную структуру в сигнатуре, где единственным предикатным символом является равенство. *Многообразиями* — от англ. *variety*; не следует путать с *manifold* — называют классы алгебр, аксиоматизируемые посредством тождеств, т.е. равенств между термами. Например, можно говорить о многообразии всех групп или колец. В первом приближении универсальная алгебра — наука о многообразиях. Мы познакомимся с основными понятиями и методами универсальной алгебры, применяемыми в логике. В частности, с помощью так называемых *свободных алгебр* (которые также представляют интерес сами по себе) мы докажем знаменитую теорему Бирхоффа: класс алгебр является многообразием, если и только если он замкнут относительно гомоморфных образов, подструктур и прямых произведений.

II. Под *решёткой* понимают частично упорядоченное множество, в котором у всякого непустого конечного подмножества есть супремум и инфимум. На самом деле, решётки можно воспринимать как алгебры. Более того, они занимают центральное место в универсальной алгебре. *Булевы алгебры* — особый класс решёток, играющий важную роль в математике. Мы докажем основные результаты, связанные с булевыми алгебрами. В частности, среди них будут различные версии теоремы о представлении булевых алгебр, одна из которых устанавливает тесную связь между булевыми алгебрами и особого рода топологическими пространствами. Эту связь называют *дуальностью Стоуна*.

III. Известно, что *реляционной семантики*, также известной как *семантика возможных миров* или *семантика Крипке*, нередко не хватает для полной характеризации логических систем: для таких систем нельзя получить теоремы о полноте относительно реляционной семантики. С другой стороны, практически любая разумная система сильно полна относительно подходящей алгебраической семантики. Несмотря на то что этот тип семантики является существенно более абстрактным, он оказывается весьма удобен с математической точки зрения, поскольку открывает путь к широкому применению методов универсальной алгебры. Мы обсудим алгебраические семантики для (пропозициональных) модальной логики K и интуиционистской логики Int. Эти семантики индуцируют тесные связи между логическими и алгебраическими свойствами. Например, оказывается, что расширение Int обладает интерполяционным свойством Крейга тогда и только тогда, когда соответствующее ему многообразие алгебр является амальгамируемым. Такого рода связи позволяют получать многочисленные яркие результаты.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА

1. Краткий экскурс в классическую логику первого порядка.

2. Гомоморфизмы, подалгебры и конгруэнции. Теорема о гомоморфизме.

3. Прямые произведения. Прямые и подпрямые разложения.

4. Свободные алгебры. Теорема Биркхоффа о многообразиях.

5. Решётки. Теорема Кнастера-Тарского.

6. Булевы алгебры и булевы кольца.

7. Представление булевых алгебр. Фильтры.

8. Ультрафильтры и дуальность Стоуна.

9. Краткий экскурс в неклассические логики.

10. Модальные алгебры и алгебраическая семантика для пропозициональной модальной логики K.

11. Гейтинговы (псевдобулевы) алгебры и алгебраическая семантика для пропозициональной интуиционистской логики Int.

12. Применения универсальной алгебры в изучении решёток расширений K и Int.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. Burris, H.P. Sankappanavar*, A Course in Universal Algebra. Springer, 1981.

[2] *S. Givant, P. Halmos*, Introduction to Boolean Algebras. Springer, 2009.

[3] *A. Chagrov, M. Zakharyaschev*, Modal Logic. Oxford University Press, 1997.

[4] *D.M. Gabbay, L. Maksimova*, Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics. Oxford University Press, 2005.