

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Весенний семестр 2024/2025 учебного года

Курс

«Введение в геометрическую теорию групп»

(лектор – Лысёнок Игорь Геронтьевич)

Цель спецкурса — ознакомление слушателей с ключевыми понятиями и методами геометрической теории групп. В частности, будет дано представление о теории групп, действующих на деревьях (теории Басса-Серра), квазиизометрических отображениях пространств, гиперболических метрических пространствах и гиперболических группах в смысле Громова. От участников спецкурса не требуется специальной подготовки, достаточно лишь знания алгебры в объёме университетского курса, а также начальных понятий топологии. Приглашаются студенты любых курсов и аспиранты.

ПРОГРАММА

1. Свободные группы.

Определение свободной группы. Лемма о ромбе. Нормальная форма элементов. Универсальное свойство свободных групп.

2. Задания групп с помощью порождающих и соотношений.

Выводы с помощью определяющих соотношений групп. Алгебраическая интерпретация заданий групп с помощью фактор-групп свободных групп. Преобразования Тице. Диаграммы ван Кампена. Лемма ван Кампена.

3. Введение в алгоритмические проблемы.

Проблемы равенства и сопряженности. Проблема сопряженности в свободных группах. Проблема изоморфизма. Пример класса групп с разрешимой проблемой изоморфизма: конечно порожденные абелевы группы. Проблема вхождения в подгруппу. Неразрешимость большинства алгоритмических проблем для групп (без доказательства).

4. Графы в геометрической теории групп.

Графы как комбинаторные 1-комплексы. Деревья. Фундаментальная группа графа. Накрытия графов. Действия групп: основные понятия. Графы

Кэли и Шрайера. Теорема Шрайера о подгруппах свободной группы. Проблема вхождения в подгруппу для свободной группы.

5. Асимптотические характеристики групп.

Словарная метрика на группе. Функция роста. Инвариантность функции роста относительно выбора порождающих групп. Функция Дэна. Инвариантность функции Дэна относительно выбора задания группы в терминах порождающих и соотношений. Примеры верхних оценок функции Дэна.

6. Свободные конструкции.

Свободные произведения групп. Нормальная форма элементов свободного произведения. Универсальное свойство свободного произведения. Свободные произведения с объединенной подгруппой. Модифицированный вариант леммы о ромбе. Нормальная форма элементов свободного произведения с объединенной подгруппой. Универсальное свойство свободного произведения с объединенной подгруппой. HNN-расширения групп. Нормальная форма элементов HNN-расширения. Лемма Бриттона.

7. Введение в теорию групп, действующих на деревьях.

Графы групп. Построение фундаментальной группы графа групп. Построение дерева действия группы для свободных конструкций. Построение дерева действия групп в общем случае.

8. Введение в грубую геометрию.

Квазиизометрические вложения. Квазиизометрии. Критерии квазиизометричности. Теорема Милнора-Шварца. Квазиизометрические инварианты групп.

9. Гиперболические метрические пространства.

Геометрические пространства. Метрические деревья. Эквивалентные определения гиперболических метрических пространств.

10. Гиперболические группы.

Теорема Громова об эквивалентности гиперболичности группы линейности ее функции Дэна. Примеры гиперболических групп: дискретные подгруппы движений гиперболического пространства; группы с условием малого сокращения.