ISBN 978-5-6052004-7-5

Ежегодная международная научная конференция

# « БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА »

# Physical origin of fractional Brownian motion and related Gaussian models of anomalous diffusion

Ya. A. Butko[1]

This is the joint work with Christian Bender, Mirko D'Ovidio and Gianni Pagnini.

Experimentally well-established, anomalous diffusion (AD) is a phenomenon observed in many different natural systems belonging to different research fields. In particular, AD has become foundational in living systems after a large use of single-particle tracking techniques in the recent years. Generally speaking, AD labels all those diffusive processes that are governed by laws that differ from that of classical diffusion, namely, all that cases when particles' displacements do not accomodate to the Gaussian density function and/or the variance of such displacements does not grow linearly in time.

We establish the physical origin of AD within the classical picture of a test-particle kicked by infinitely many surrounding particles. We consider a stochastic dynamical system where the microscopic thermal bath is the source for the mesoscopic Brownian motion of a bunch of $N$ particles that express the environment of a single test-particle. Physical conservation principles, namely the conservation of momentum and the conservation of energy, are met in the considered particle system in the form of the fluctuation-dissipation theorem for the motion of the surround-particles. The key feature of the considered particle-system is the distribution of the masses of the particles that compose the surround of the test-particle. When the number of mesoscopic Brownian particles $N$ is large enough for providing a crowded environment, then the test-particle displays AD characterised by the distribution of the masses of the surround-particles. More precise, we prove that, in the limit $N \to \infty$, the test-particle diffuses according to a quite general (non-Markovian) Gaussian process $(Z_t)_{t\geq 0}$ characterised by a covariance function

$$\mathrm{Cov}(Z_t, Z_s) = C(v(t) + v(s) - v(|t-s|)), \tag{1}$$

[1]University of Kassel, Germany. Email: kinderknecht@mathematik.uni-kassel.de

where $v(\cdot)$ is determined by the distribution of the masses of the surround-particles. With a particular choice of distribution of masses of surround-particles, we obtain fractional Brownian motion (fBm) with Hurst parameter $H \in (1/2, 1)$ as a special case. In this respect, we remind that the fBm experimentally turned out to be the underlying stochastic motion in many living systems. We present also some distributions of masses of the surround-particles which lead to a mixture of independent fractional Brownian motions with diferent Hurst parameters or to a classical Wiener process as a limiting process $(Z_t)_{t\geq 0}$. Moreover, we present some distributions of masses of the surround-particles leading to the limiting processes which perform a transition from ballistic diffusion to superdiffusion, or from ballistic diffusion to classical diffusion.

Furthermore, the constant $C$ in formula (1) depends on the coupling parameter between the test-particle and the surround. Therefore, if we consider several independent identical copies of the same Brownian surround and immerse into each copy of the surround a single test particle of the same art but with its own individual characteristics (assuming our test-particle is a complex macromolecule with its individual shape, radius, densty e.t.c.), we may obtain different coupling parameters and hence different coefficients $C$ in the covariance of the limiting Gaussian process $(Z_t)_{t\geq 0}$ in different copies of the experiment. This fact serves as a physical basis for the formulation of AD within the framework of the superstatistical fBm, where further randomness is provided by a distribution of the diffusion coeffients associated to each diffusing test-particle and also within the framework of its generalisation called diffusing-diffusivity approach, where the diffusion coefficient of each test-particle is no longer a random variable but a process.

## References

1. A Limit Theorem Clarifying the Physical Origin of Fractional Brownian Motion and Related Gaussian Models of Anomalous Diffusion / C. Bender [et al.] ; Preprint. — 2024. — URL: `https://arxiv.org/abs/2411.18775`.

## Nonwandering set of skew products on multidimensional cells and $\Omega$-blow up in the family of fibers maps

L. S. Efremova[1]

The structure of the nonwandering set of skew products of interval maps on multidimensional cells is studied. The influence of the $\Omega$-blow ups in the family of fiber maps on the structure of the nonwandering set of a skew product is clarified [2].

Let $I^n$ be $n$-dimensional cell ($n \geq 2$), and

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

be a skew produst with the phase space $I^n$.

A map $F\colon I^n \to I^n$ is said to be *a simplest* if the set of least periods of its periodic points is bounded.

**Theorem.** *Let $F$ be a simplest continuous skew product on a cell $I^n$, $n \geq 2$. Then the nonwandering set of $F$ coincides with the set of its periodic points.*

This result finds applications, in particular, in the study of limit sets [2] and in the description of the $\Omega$-blow up phenomenon in the $C^0$-norm in smooth simplest skew products on multidimensional cells [1].

**Acknowledgments.** The study is supported by RSF, project No 24-21-00242.

### References

1. *Efremova L. S., Novozhilov D. A.* Chain-recurrent $C^0$- $\Omega$-blow up in $C^1$-smooth simplest skew products on multidimensional cells // Regular and Chaotic Dynamics. — 2025. — Vol. 30, no. 1.
2. *Efremova L. S., Shalagin M. A.* On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. — 2024. — Vol. 32, no. 6. — P. 796–815.

[1]University of Nizhny Novgorod, Moscow Institute of Physics and Technology.
Email: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

## Path Integrals and Born-Jordan Quantization

J. E. Gough[1]

The Feynman formulation of quantum mechanics apparently takes a classical model (described by a Lagrangian or Hamiltonian) and constructs a propagator via the method of path integrals. This would then seem to imply a mathematical route from classical to quantum, and therefore a quantization rule. We shall describe the limit of the classical action between two endpoints where the spatial separation is fixed but the time of travel is short. This serves as an approximation for the time slices approximating the phase space path integral. We show that the natural approximation leads to an average of the Shubin $\tau$-quantization, for $\tau$ uniformly distributed in $[0, 1]$, and that this corresponds to the Born-Jordan quantization rule. We connect this with the paper of Smolyanov, Tokarev and Truman on phase space path integrals via the Chernoff formula.

[1]Aberystwyth University. Email: jug@aber.ac.uk

# Mathematical theory of stochastic quantum master equation (quantum filtering equation for mixed states)

V. N. Kolokoltsov[1]

Unravelling of quantum dynamic semigroups (described by Lindblad quantum master equations) leads to quantum stochastic nonlinear master equations, which represent also the Belavkin's quantum filtering equations for mixed states. Since their invention about 40 years ago, there did not appear so far any satisfactory mathematical theory of these equations. Difficulties in the rigorous mathematical analysis of these equations arise, because the natural space for their dynamics is the Banach space of trace-class hermitian operators (mixed states of quantum systems), for which no satisfactory extension of Ito'stochastic calculus was ever developed. We suggest a solution to this 40 year old problem by building the dynamics in a mathematically handy space of Hilbert-Schmidt operators. This formulation leads necessarily to SDEs with singular (discontinuous and/or non Lipschitz) coefficients, as trace is not a bounded functional in this Hilbert space. As we show, this new difficulty can be overcome by introducing certain new intermediate Hilbert spaces specifically tailored to the Cauchy problems for stochastic master equation. The theory extends to nonlinear equations arising in quantum filtering of interacting particles leading to the theory of quantum mean-field games.

[1]Lomonosov Moscow State University, Higher School of Economics.
Email: kolokoltsov59@mail.ru

## GAN and Lotka-Volterra equations in machine learning

I. A. Lopatin[1]

Overfitting is a common problem in machine learning. We investigate the reduction of overfitting effects by drawing analogies between machine learning procedures and biological processes. Specifically, we interpret well-known Generative Adversarial Networks (GAN) framework [1] as a predator-prey model from biology. We demonstrate that the gradient descent process for solving the main minimax problem of GANs [1]:

$$\min_y \max_x V(x,y),$$
$$V(x,y) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} \log D(z_l, x) + \int_Z p_{\text{gen}}(z,y)\log(1 - D(z,x))dz,$$

where $\{z_l\}$ is a sample, $D(z,x)$ and $p_{\text{gen}}(z,y)$ are parametric families of probability distributions on the space $Z$, called the *discriminator* and the *generator* with learning parameters $x, y$, respectively (assuming $x, y \in \mathbb{R}^d$), can be interpreted as a dynamical system analogous to the Lotka-Volterra equations. Building on this interpretation we propose a new machine learning algorithm [2]. For minimization problem $\mathcal{L}(x) \to \min$ (e.g., regression problem), we introduce modified Lotka-Volterra equations

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla\mathcal{L}(x) + U(x-y),$$
$$\frac{dy}{dt} = -W(x-y),$$

where $U$ and $W$ are special vector functions (forces) describing the interaction between the prey and the predator. We analyze how this new model helps reduce overfitting.

[1] Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
Email: lopatin.ia@phystech.edu

## References

1. Generative Adversarial Networks / I. J. Goodfellow [et al.]. — 2014. — DOI: 10.48550/ARXIV.1406.2661.
2. *Kozyrev S. V., Lopatin I. A., Pechen A. N.* Control of Overfitting with Physics // Entropy. — 2024. — Dec. — Vol. 26, no. 12. — P. 1090. — ISSN 1099-4300. — DOI: 10.3390/e26121090.

# Ergodicity of invariant measures on a Hilbert space and pecularities of state diffusion

V. Zh. Sakbaev[1]

We study a finitely additive nonnegative measure $\lambda$ on a real separable Hilbert space $E$ that are invariant with respect to the group of shifts on any vector of this space.

The Hilbert space $H = L_2(E, \lambda, C)$ of function that are squre integrable with respect to an invariant measure is intoduced. We show that the representation $\pi$ of the Abelian group $E$ in the space $H$ is not strongly continuous and we find the subgroup $L$ such that the mapping $\pi : L \to B(H)$ is continuous in the strong operator topology.

Let $G$ be a group of mapping of a space $E$ into itself. Let $R$ be a $G$-invariant ring of subsets of a space $E$.

**Definition.** A $G$-invariant measure $\mu : R \to [0, +\infty)$ is called

1. *ring-decomposible* with respect to the group $G$ if there are two $G$-invariant subrings $r_1, r_2$ of the ring $R$ satysfying conditions a), b) such that $\mu(A) = 0 \ \forall \ A \in r_1 \bigcap r_2$; where
   a) $\mu|_{r_1} \neq 0, \ \mu|_{r_2} \neq 0$,
   b) the ring $R$ is completion with respect to the measure $\mu$ of the ring which is generated by the collection of sets $r_1 \bigcup r_2$;
2. *ring-ergodic* with respect to the group $G$ if for any two $G$-invariant subrings $r_1, r_2$ of the ring $R$ the conditions a), b) imply that there is $A \in r_1 \bigcap r_2$ such that $\mu(A) > 0$.

The decomposition of a $G$-invariant measure $\mu$ to the sum of ring-ergodic with respect to the group $G$ mutually singular measures is called *ring-ergodic with respect to the group $G$ decomposition of the $G$-invariant measure $\mu$.*

We obtain the ring-ergodic with respect to the group $L$ decompositions $\lambda = \oplus_{z \in E/L} \lambda_z$ and the orthogonal decomposition $H = \oplus_{z \in E/L} H_z$ where $H_z = L_2(E, \lambda_z, C)$.

[1]Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Ufa Mathematical Institute UFRC RAS.
Email: fumi2003@mail.ru

We prove, that the representation **U** of the convolutional semigroup of Gaussian measures on the space $E$ in the space $H$ is strongly continuous if and only if subspaces $H_z,\ z \in E/L$, are invariant with respect to the semigroup **U**.

## Polar Decomposition of Wiener Measure and Warped Virasoro Group

E. T. Shavgulidze[1]

We derive the explicit form of the polar decomposition of the two-dimensional Wiener measure, and obtain the equation connecting functional integrals on the warped Virasoro group. Using this connection we evaluate some nontrivial functional integrals in the Schwarzian theory and also find the fundamental solution of the Schroedinger equation in imaginary time in the model of conformal quantum mechanics.

### References

1. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Unusual view of the Schwarzian theory // Mod. Phys. Lett. A. — 2018. — No. 33. — P. 1850221.
2. *Shavgulidze E. T., Shavgulidze N. E.* Polar Decomposition of Wiener Measure and Schwarzian Integrals // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, no. 4. — P. 709–713.

[1]Lomonosov Moscow State University. Email: shavgulidze@bk.ru

## Thermal coordinates and black hole thermodynamics

D. O. Stepanenko[1]

In black hole thermodynamics, two fundamental questions arise: the black hole explosion problem and the violation of the third law of thermodynamics.

The black hole explosion problem, as discussed in [3], arises from the expression for Hawking temperature, $T = \frac{1}{8\pi M}$, which diverges as the mass $M \to 0$. A proposed solution for Schwarzschild black holes was introduced in [1], involving a modification of Kruskal coordinates by introducing thermal coordinates, represented as:

$$T = \frac{1}{\mathcal{B}(M)} = \frac{1}{2\pi(4M + b)} \tag{1}$$

As $M$ approaches a small value, this formulation prevents the temperature from diverging, instead allowing it to settle at a constant value.

However, this method does not address the violation of the third law of thermodynamics [2], which states that entropy should approach zero as temperature approaches zero. Indeed, the entropy of a black hole depends on temperature as:

$$S = \frac{1}{16\pi T^2} \tag{2}$$

Thus, as $T \to 0$, a violation of the third law of thermodynamics occurs, as formulated by Planck. In this talk, we propose a generalization of thermal coordinates [4] that addresses both the violation of the third law and the black hole explosion problem.

### References

1. *Aref'eva I., Volovich I.* Quantum Explosions of Black Holes and Thermal Coordinates // Symmetry. — 2022. — Dec. — Vol. 14, no. 11. — P. 2298. — ISSN 2073-8994. — DOI: `10.3390/sym14112298`.

[1]Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow Institute of Physics and Technology.
Email: dstepapenenko@mi-ras.ru

2. *Aref'eva I., Volovich I.* Violation of the third law of thermodynamics by black holes, Riemann zeta function and Bose gas in negative dimensions // The European Physical Journal Plus. — 2024. — Mar. — Vol. 139, no. 3. — ISSN 2190-5444. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05049-7.
3. *Hawking S. W.* Black hole explosions? // Nature. — 1974. — Mar. — Vol. 248, no. 5443. — P. 30–31. — ISSN 1476-4687. — DOI: 10.1038/248030a0.
4. *Stepanenko D., Volovich I.* Thermal coordinates and black hole thermodynamics, [In preparation].

## Quantum spin chains with dissipation and Jacobi operators

A. E. Teretenkov[1]

We consider dissipative dynamics of the one-dimensional nearest-neighbour XX spin-1/2 chain governed by the Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad master equation. We identify a broad class of dissipators that lead to translation-invariant dynamics of the so-called Onsager space. Furthermore, we show that the translation-invariant sector of the Onsager space is spanned by the Hamiltonian integrals of motion, whose dynamics in the Heisenberg picture is just exponential decay, and operators whose dynamics in the Heisenberg picture can be described in terms of exponentials of tridiagonal matrices. The thermodynamic limit of such dynamics can be defined by semigroups with corresponding Jacobi operators as the generators. We give explicit eigenvalues and eigenfunctions of such generators.

The talk is based on the work: [1].

### References

1. *Teretenkov A.*, *Lychkovskiy O.* Exact dynamics of quantum dissipative XX models: Wannier-Stark localization in the fragmented operator space // Physical Review B. — 2024. — Vol. 109, no. 14. — P. L140302.

[1]Department of Mathematical Methods for Quantum Technologies, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences. Email: taemsu@mail.ru

# A new family of identities for Bessel functions and its relation to one mixed functional differential equation

E. B. Velilaev[1], A. E. Rassadin[2].

**Keywords**: the Cauchy problem; integral of motion; the Fourier transform.

**MSC2020 codes:** 33C10

## Introduction

Consideration of various differential equations often leads to the establishment of identities for various special functions. Mixed functional differential equations are just beginning to be intensively studied (see [1] and references therein), so their consideration makes it possible to discover new very nontrivial identities.

## Introduction

Let $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ and $a \in \mathbb{R}$. Further, let one construct the following infinite-dimensional Hermitian matrix:

$$c_{nm}(a) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x - n\,a)\, u_0^*(x - m\,a)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)|^2\, dx}\,, \qquad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

then the next identity is valid:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm}(a)\, J_n(t)\, J_m(t) = 1\,, \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

where $J_n(t)$ is the Bessel function of the first kind with index $n$.

To prove this identity let one consider the next Cauchy problem:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{u(x+a,t) - u(x-a,t)}{2}\,, \qquad u(x,0) = u_0(x). \tag{3}$$

---

[1]HSE University, Department of Fundamental Mathematics, Russia, Nizhny Novgorod. Email: ebvelilaev@edu.hse.ru.

[2]HSE University, Department of Fundamental Mathematics, Russia, Nizhny Novgorod. Email: aerassadin@hse.ru.

Under small $a$ this mixed functional differential equation turns into a linear transfer equation.

Using the Fourier transform, it is easy to show that the general solution of the Cauchy problem (3) is:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)\, u_0(x - n\, a), \tag{4}$$

and that equation (3) has the following integral of motion:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)|^2\, dx. \tag{5}$$

Substituting the sum (4) into the integral of motion (5), we obtain the identity (2) with the coefficients (1).

## References

1. *Myshkis A.* Mixed functional differential equations. // Journal of Mathematical Sciences. — 2005. — Vol. 129, no. 5. — P. 4111–4226.

## On the Equivalence Between the Schrodinger Equation in Quantum Mechanics and the Euler-Bernoulli Equation in Elasticity Theory

I. V. Volovich[1]

We show that the Schrodinger equation in quantum mechanics is mathematically equivalent to the Euler-Bernoulli equation for vibrating beams and plates in elasticity theory with dependent initial data [1]. We discuss potential applications of this equivalence for symplectic and quantum computing, and the two-slit experiment.

### References

1. *Volovich I.* On the Equivalence Between the Schrodinger Equation in Quantum Mechanics and the Euler-Bernoulli Equation in Elasticity Theoryp-Adic Numbers // Ultrametric Analysis and Applications. — 2025. — Vol. 17, no. 1. — P. 79–85.

[1] Steklov Mathematical Institute RAS. Email: volovich@mi-ras.ru

# О гипонормальных измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев[1].

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{pr}$ — решетка проекторов в $\mathcal{M}$, $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M}, \tau)$ — $^*$-алгебра всех $\tau$-измеримых операторов. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *гипонормальным,* если $T^*T \geqslant TT^*$; *когипонормальным,* если $T^*T \leqslant TT^*$. Мы продолжаем исследования, начатые в [3].

**Теорема 1.** *Если оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален, $P \in \mathcal{M}^{pr}$ и $TP = \lambda P$ для некоторого комплексного числа $\lambda$, то $TP = PT$ и оператор $T|_{P\mathcal{H}}$ нормален.*

Пусть $\mu(t; X)$ — функция сингулярных значений оператора
$X \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

**Теорема 2.** *Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ гипонормален тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) \geqslant \mu(t; T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}^{pr}$ с $\tau(P) < +\infty$.*

Пусть $t_{\tau l}$ — топология локальной сходимости по мере на $S(\mathcal{M}, \tau)$; определение и свойства $t_{\tau l}$ см. в [1; 2; 4; 5]. Следующее утверждение является обобщением задачи 226 из книги [6] на неограниченные $\tau$-измеримые операторы.

**Теорема 3.** *Множество всех $\tau$-измеримых гипонормальных операторов $t_{\tau l}$-замкнуто.*

**Следствие.** *Множество всех $\tau$-измеримых когипонормальных операторов $t_{\tau l}$-замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ - конечна.*

[1]Казанский (Приволжский) федеральный университет.
Email: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

## Литература

1. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Труды МИАН. — 2006. — Т. 255. — С. 41—54.
2. *Бикчентаев А. М., Тихонов О. Е.* Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере // Труды МИАН. — 2024. — Т. 324. — С. 51—59.
3. *Bikchentaev A.* Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Advances in Operator Theory. — 2024. — Vol. 9, no. 4.
4. *Bikchentaev A. M.* The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2004. — Vol. 14. — P. 17–24.
5. *Ciach L. J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloquium Mathematicum. — 1988. — Vol. 55, no. 1. — P. 109–121.
6. *Halmos P. R.* A Hilbert space problem book. — Second Edition. — Berlin : Springer-Verlag, 1982. — 369 p.

## Уравнения Биркгофа

С. А. Будочкина[1]

Уравнения вида

$$N_i(u) \equiv \sum_{j=1}^{2n} \left( \frac{\partial \mathcal{R}_j}{\partial u^i} - \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial u^j} \right) \dot{u}^j - \left[ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u^i} + \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial t} \right] = 0, \quad i = \overline{1, 2n},$$

называются уравнениями Биркгофа. Они получены из условия стационарности действия по Пфаффу

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^{2n} \mathcal{R}_i(t, u) \cdot \dot{u}^i - \mathcal{B}(t, u) \right] dt.$$

Системы Биркгофа являются обобщениями гамильтоновых систем. Следует отметить, например, монографию [2], посвященную исследованию классических систем Биркгофа. В ней ставятся и решаются прямые и обратные задачи для систем Биркгофа. Доклад основан на работах [1—4]. Будет дан обзор работ [1; 2], а также изложены результаты автора.

**Благодарности.** Публикация выполнена в рамках проекта
№ 002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы.

## Литература

1. *Savchin V. M.* An operator approach to Birkhoff's equations // Вестник РУДН. Серия Математика. — 1995. — 2 (2). — С. 111—123.
2. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу / А. С. Галиуллин [и др.]. — М. : Редакция журнала «Успехи физических наук», 1997. — 324 с. — ISBN 5-85504-006-2.

[1]Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы.
Email: budochkina-sa@rudn.ru

3. *Budochkina S. A., Shinkarenko I. V.* An indirect variational formulation of a third-order ordinary differential equation and Birkhoff's equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, no. 10. — P. 4912–4924.
4. *Budochkina S. A., Vu H. P.* On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations // Eurasian Mathematical Journal. — 2022. — Vol. 13, no. 3. — P. 23–32. — DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-3-23-32.

# Формула Фейнмана-Каца в вопросах существования решения сингулярных параболических систем

В. П. Бурский[1][2].

Рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = q\Delta u + V(x)\, u, & (x \in \mathbf{R}^N,\ t > 0), \\ u(x,0) = f(x), & (x \in \mathbf{R}^N), \quad 0 \leqslant f \in L^1(\mathbf{R}^N). \end{cases} \qquad (*)$$

Интерес к задаче (*) с указанным потенциалом вызван тем, что в скалярном случае $u(x,t) \in \mathbf{R}$, $q > 0$, $c > 0$, при $0 \leqslant V \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N \setminus \{0\})$, $V(x) \leqslant c/|x|^{2-\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в окрестности нуля задача (1) имеет единственное неотрицательное решение в смысле распределений, а при $V(x) \geqslant c/|x|^{2+\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности нуля, задача (*), как показали Брезис и Лионс, не имеет неотрицательного решения. В работе [2] рассматривается скалярная задача (*) $q = 1,\ V(x) = c/|x|^2$ и ее приближение

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = q\Delta u_n + V_n(x)\, u_n, \\ u_n(x,0) = f(x), \end{cases} \quad (**) \qquad V_n(x) = \begin{cases} c/|x|^2, & |x| \geqslant 1/n \\ cn^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

и доказано, что, если $0 \leqslant c \leqslant c^* = (N-2)^2/4$, то $u_n$ возрастает к решению $u$ из (1) в смысле распределений, а если $c > c^*$, то $u_n(x) \to \infty$, $\exists \alpha > 0, \int_{R^n} |x|^{-\alpha} f(x) dx < \infty$.

В нашей работе [1] рассмотрена система (*), где $u(x,t) \in \mathbf{R}^p$, $q = \mathrm{diag}(q_1, q_2, \dots, q_p)$, $q_k > 0$, $V^{ij}(x) = c^{ij}/|x|^2$, которая приближается системой (**). Доказано, что, если $c^{ij} > 0,\ c^{ii} > \pi^2 N^2 \max q_i/8$, то решение системы (**) $u_n(x,t) \to \infty,\ \forall t > 0, \forall x$. Наоборот, пусть $S = \max_i S_i/q^i$, где $S_i$ — сумма элементов $i$-й строки матрицы $(c^{ij})$. Если $S \leqslant (N-2)^2/4$, то задача (*) имеет неотрицательное решение. В доказательстве используется формула Ли-Троттера-Далецкого для параболических операторов,

[1]Московский физико-технический институт.
Email: bvp30@mail.ru
[2]Институт прикладной математики и механики РАН (Донецк).

которую теперь часто называют формулой Фейнмана-Каца.

## Литература

1. *Бурский В. П., Самойлова О. В.* Об одном применении формулы Фейнмана–Каца в вопросах существования решения сингулярных параболических систем // Нелинейные граничные задачи. — 2005. — Т. 15. — С. 126—140.
2. *Baras P., Goldstein J.* The Heat Equation with a Singular Potential // Transactions of The American Mathematical Society. — 1984. — July. — Vol. 284. — P. 121–121. — DOI: 10.2307/1999277.

## Бесконечномерные грассманианы в теории интегрируемых систем

А. В. Домрин[1]

Бесконечномерные грассманианы Сато [2] и Сегала–Вильсона [3] параметризуют решения солитонных уравнений (сразу для всех потоков иерархии), являющиеся соответственно формальными степенными рядами и глобально мероморфными функциями от независимых переменных.

Мы определим для каждого натурального числа $m$ промежуточный грассманиан, большая клетка которого параметризует все (это слово играет ключевую роль) локальные голоморфные решения $m$-го потока иерархии.

В качестве следствий получаем монотонное убывание множества допустимых начальных условий локальной голоморфной задачи Коши с ростом $m$, глобальную мероморфность всех решений по пространственной переменной при $m \geqslant 2$ и описание полюсов решения в зависимости от пересекаемых его орбитой стратов грассманиана.

### Литература

1. *Домрин А. В.* Тау-функции решений солитонных уравнений // Изв. АН Сер. матем. — 2021. — Вып. 3, № 85. — С. 30—51.
2. *Sato M.* Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds // RIMS Kokyuroku. — 1981. — No. 439. — P. 30–46.
3. *Segal G., Wilson G.* Loop groups and equations of KdV type // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. — 1985. — No. 61. — P. 5–65.

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
Email: domrin@mi-ras.ru

## Предельные теоремы для эволюций квантовых состояний

С. В. Дженжер[1]

Хорошо известен закон больших чисел для суммы независимых одинаково распределённых случайных величин на банаховом пространстве. В случае случайных операторов на гильбертовом пространстве сумму величин заменяют на композицию операторов. Нетривиальной частью здесь является случай некоммутативных операторов. В работе получен закон больших чисел для случайных операторов на пространствах $\ell_1$ и $\ell_2$. Интерес к этому случаю возникает из изучения случайных квантовых каналов.

Другой нашей целью является получить для композиций ядерных операторов усиленный закон больших чисел и центральную предельную теорему в слабой операторной топологии.

### Литература

1. *Orlov Yu., Sakbaev V., Shmidt E.* Compositions of Random Processes in a Hilbert Space and Its Limit Distribution // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — July. — Vol. 44. — P. 1432–1447. — DOI: `10.1134/S1995080223040212`.
2. *Orlov Yu., Sakbaev V., Smolyanov O.* Feynman Formulas and the Law of Large Numbers for Random One-Parameter Semigroups // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2019. — Sept. — Vol. 306. — P. 196–211. — DOI: `10.1134/S0081543819050171`.

[1]Московский физико-технический институт. Email: sdjenjer@yandex.ru

# Логарифмическая гёльдеровость и экстремумы степенных функций Такаги

О. Е. Галкин[1], С. Ю. Галкина[2].

Доклад посвящен свойствам степенных функций Такаги $S_p(x)$. Эти функции по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги $T(x)$, описанной в 1903 году. Они имеют один вещественный параметр $p > 0$ и могут быть заданы так:

**Определение 1.** *Степенной функцией Такаги с параметром (или показателем)* $p > 0$ мы называем вещественнозначную функцию $S_p$, задаваемую на числовой оси $\mathbb{R}$ с помощью равенства

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $S_0(x) = \big|x - \lfloor x + 1/2 \rfloor\big| = \rho(x, \mathbb{Z}) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |x - q|$ — расстояние между точкой $x$ и ближайшей к ней целой точкой, $\lfloor y \rfloor$ — целая часть числа $y \in \mathbb{R}$, $\{y\}$ — дробная часть числа $y$.

При $p = 1$ функция $S_p(x)$ совпадает с функцией Такаги $T(x)$.

Частичные суммы ряда (1) будем обозначать через $S_{p,m}(x)$:

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

График степенной функций Такаги $y = S_p(x)$ для случая $p = 0{,}5$, изображенный сплошной синей линией, вместе с графиками частичных сумм $y = S_{p,n}(x)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4$, изображенными красными и зелеными линиями, можно увидеть на рисунке 1. Вертикальные штрихпунктирные линии указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке $[0; 1]$: $x = 1/3$ и $x = 2/3$.

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Email: olegegalkin@ya.ru

[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Email: svetlana.u.galkina@mail.ru

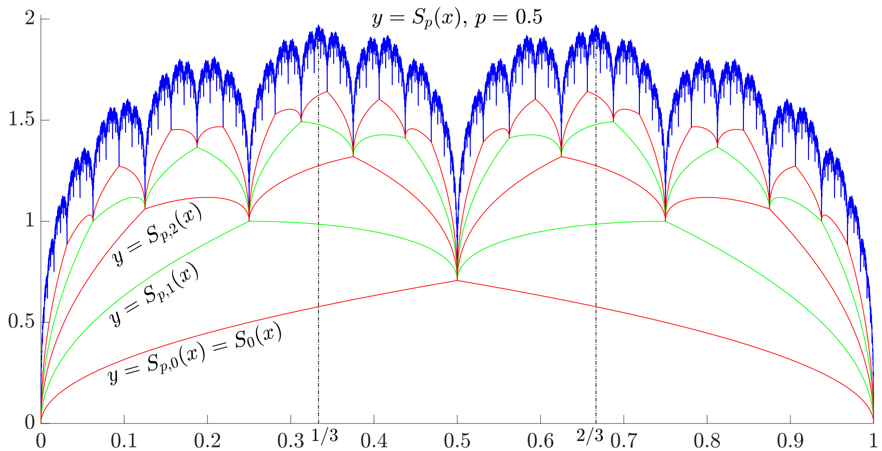


Рис. 1: График функции $y = S_p(x)$ при $p = 0{,}5$.

Мы получили, в частности, следующие результаты:

1. Функции $S_p$ на $\mathbb{R}$ при любом $p > 0$ непрерывны, имеют период 1, симметричны и ограничены, причём в случае $p \in (0; 1)$ они нигде не дифференцируемы.
2. Для $p \in (0; 1)$ глобальный максимум функции $S_p$ равен $2^p/(3^p(2^p - 1))$ и достигается только в точках вида $q + 1/3$ и $q + 2/3$, где $q \in \mathbb{Z}$, а глобальный минимум равен 0 и достигается только в целых точках.
3. При $p \in (0; 1]$ степенная функция Такаги $S_p$ удовлетворяет логарифмическому условию Гёльдера $|S_p(x) - S_p(y)| \leqslant C \cdot |x - y|^p \cdot \log_3 (1/|x - y|)$ с наименьшей константой $C = 2^p/(2^p - 1)$. Отсюда вытекает «обычное» условие Гёльдера для $S_p$.
4. В случае $p \in (0; 1)$ в двоично-рациональных точках, и только в них, функция $S_p$ достигает строгого локального минимума на $\mathbb{R}$, а в точках вида $q/(3 \cdot 2^n)$, где $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $q$ — целое и не делится на 3, $S_p$ достигает строгого локального максимума.

## Литература

1. *Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Муляр О. А.* О логарифмической гёльдеровости и локальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. — 2023. — Т. 25, № 4. — С. 223—241.
2. *Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Тронов А. А.* О глобальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. — 2023. — Т. 25, № 2. — С. 22—36.

# Универсальность полугрупповых $C^*$-алгебр для положительных конусов рациональных чисел

Р. Н. Гумеров[1], А. С. Куклин[2]

В докладе рассматриваются приведенные полугрупповые $C^*$-алгебры $C_r^*(G^+)$ для положительных конусов $G^+$ в упорядоченных абелевых группах $G$, которые исследовал Дж. Мерфи [3].

Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел и $\mathbb{Q}_P^+$ — положительный конус в аддитивной группе $\mathbb{Q}_P$ всех рациональных чисел вида $\frac{m}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим $C^*$-алгебру $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$, порожденную регулярным представлением полугруппы $\mathbb{Q}_P^+$. Эта $C^*$-алгебра является пределом индуктивной последовательности алгебр Теплица $C_r^*(\mathbb{Z}^+)$ [1]. С использованием этого факта в статье [2] получено следующее описание алгебры $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ в качестве универсальной $C^*$-алгебры, порожденной наборами образующих элементов и соотношений для них.

**Теорема.** *Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots)$ — произвольная последовательность простых чисел, $X = \{1, x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество элементов, удовлетворяющих набору соотношений $R = \{x_i^* x_i = 1, x_i = x_{i+1}^{p_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тогда приведенная полугрупповая $C^*$-алгебра $C_r^*(\mathbb{Q}_P^+)$ является универсальной $C^*$-алгеброй, порожденной $X$ и $R$.*

Доклад посвящен обсуждению этого результата.

## Литература

1. *Гумеров Р. Н.* Предельные автоморфизмы $C^*$-алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел // Сибирский математический журнал. — 2018. — 59(1). — С. 95—109.

[1]Казанский (Приволжский) федеральный университет. Email: Renat.Gumerov@kpfu.ru
[2]Казанский (Приволжский) федеральный университет. Email: soarappell@gmail.com.

2. *Gumerov R., Kuklin A., Lipacheva E.* A universal property of semigroup $C^*$-algebras generated by cones in groups of rationals // Annals of Functional Analysis. — 2024. — July. — Vol. 15, no. 3. — ISSN 2008-8752. — DOI: 10.1007/s43034-024-00374-5.
3. *Murphy G. J.* Ordered groups and crossed products of $C^*$-algebras // Pacific Journal of Mathematics. — 1991. — No. 2. — P. 319–349.

# Конечные калибровочные пространства и эргодичность

С. Г. Халиуллин[1]

В работе изучаются конечные регулярные калибровочные пространства $(H, \mathcal{M}, \tau)$, пространства операторов $L^2(\mathcal{M})$ и их свойства.

**Определение 1.** (см. [1]) *Конечным регулярным калибровочным пространством* называется тройка $(H, \mathcal{M}, \tau)$, где $H$ — комплексное гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ алгебра фон Неймана на $H$, а $\tau$ — неотрицательная вещественнозначная функция на проекторах (калибровка), такая что

(i) $\tau$ вполне аддитивна, то есть, если $\mathcal{S}$ — любой набор взаимно ортогональных проекторов в $\mathcal{M}$ с точной верхней гранью $P$, то $\tau(P) = \sum_{Q\in\mathcal{S}} \tau(Q)$;

(ii) $\tau$ унитарно инвариантна, то есть, $\tau(U^*PU) = \tau(P)$ для каждого проектора $P$ и каждого унитарного оператора $U$ в $\mathcal{M}$;

(iii) $\tau$ конечна, то есть $\tau(\mathbf{1}) < \infty$;

(iv) $\tau$ регулярна, то есть $\tau(P) > 0$, если $P$ — ненулевой проектор в $\mathcal{M}$.

Существует единственное непрерывное по норме линейное продолжение калибровки $\tau$ на все $\mathcal{M}$, которое будет следом на $\mathcal{M}$. Мы будем его обозначать его той же буквой $\tau$. Если $A \in \mathcal{M}$, положим $\|A\|^2 = \tau(A^*A)$. Пополнение алгебры $\mathcal{M}$ относительно этой нормы будет гиьбертовым пространством, обозначаемым $L^2(\mathcal{M})$.

**Определение 2.** Пусть $(H, \mathcal{M}, \tau)$ — конечное регулярное калибровочное пространство, $e$ — проектор в $\mathcal{M}$. Пусть оператор $P_e = L_e R_e$ действует в $L^2(\mathcal{M})$, где $L_e$ и $R_e$ — операторы умножения на проектор $e$ слева и справа соответственно. Множество значений $\mathcal{P}_e$ оператора $P_e$ называется подпространством Пирса, ассоциированным с проектором $e$.

**Определение 3.** Ограниченный оператор $A$, сохраняющий положительность и действующий в $L^2(\mathcal{M})$ называется неразложимым, если он не оставляет инвариантным никакое собственное подпространство Пирса.

[1]Казанский федеральный университет. Email: Samig.Haliullin@kpfu.ru

**Определение 4.** Отображение $T$ алгебры $\mathcal{M}$ является эргодическим, если для любых $x, y \in L^2(\mathcal{M}), x \geqslant 0, y \geqslant 0$ существует такое $n \in Z^+$, что $(T^n x, y) > 0$.

Также будут рассмотрены ультрапроизведения последовательностей калибровочных пространств по некоторому нетривиальному ультрафильтру в множестве натуральных чисел и их свойства.

## Литература

1. *Gross L.* Existence and uniqueness of physical ground states // Journal of Functional Analysis. — 1972. — May. — Vol. 10, no. 1. — P. 52–109. — ISSN 0022-1236. — DOI: 10.1016/0022-1236(72)90057-2.

# Классы однозначности определения источников электромагнитных полей по результатам граничных наблюдений

А. В. Калинин[1], А. А. Тюхтина[2].

Обратные задачи об источниках являются классической проблемой теории обратных задач [1; 2; 4; 9]. Хорошо известно, что по результатам граничных наблюдений источники в общем случае однозначно не восстанавливаются [3; 5—8; 10]. Поэтому важен ответ на вопрос о характеризации той части информации об источнике, которая однозначно определяется по результатам граничных наблюдений.

Для различных систем уравнений, возникающих при моделировании стационарных, квазистационарных и нестационарных электромагнитных процессов, рассматриваются прямые задачи и обратные задачи об определении источников по результатам граничных наблюдений. Для всех рассматриваемых задач в зависимости от вида граничных наблюдений приводятся ортогональные разложения функциональных пространств источников на соответствующие прямые суммы подпространств, причем проекция источника на одно из которых определяется однозначно, а никакая составляющая проекции на второе подпространство по данным граничных наблюдений восстановлена быть не может (второе подпространство образует класс неизлучающих источников). Для определения проекций источников на подпространство однозначности формулируются и обосновываются корректные постановки задач.

Работа содержит также строгие утверждения о незлучающих источниках, обобщающие результаты работ [5; 6; 10].

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, rscf.ru/project/23-21-00440.

## Литература

[1]Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. Email: avk@mm.unn.ru

[2]Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского.

1. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009.
2. *Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. — Новосибирск : Наука, 1969.
3. *Новиков П. С.* Об единственности обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. — 1938. — Т. 18(3). — С. 165—168.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979.
5. *Albanese R., Monk P. B.* The inverse source problem for Maxwell's equations // Inverse Problems. — 2006. — Vol. 22. — P. 1023–1035.
6. *Alonso R. A., Camano J., Valli A.* Inverse source problems for eddy current equations // Inverse problems. — 2012. — Vol. 28.
7. *Bleistein N., Cohen J.* Nonuniqueness in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics // Journal of Mathematical Physics. — 1977. — Vol. 18. — P. 194–201.
8. *He S., Romanov V. G.* Identification of dipole sources in a bounded domain for Maxwell's equations // Wave Motion. — 1998. — Vol. 28. — P. 25–40.
9. *Isakov V.* Inverse Source Problems. — Providence : American Mathematical Society, 1990.
10. *Marengo E. A., Devaney A. J.* Nonradiating sources with connections to the adjoint problem // Physical Review E. — 2004. — Vol. 70.

# Теория обучения как физика

С. В. Козырев[1]

Обсуждается применение в теории обучения моделей из физики и биологии.

Для динамики Ланжевена стохастического градиента (SGLD, броуновское движение в потенциале) — контроль переобучения обеспечивается формулой Эйринга химической кинетики.

Гроккинг (отложенное обобщение в теории обучения) обсуждается как броуновское движение, это позволяет объяснить наблюдаемые для гроккинга закономерности.

Для модели GAN (Generative Adversarial Network) применяется интерпретация типа хищник–жертва из биологии. Контроль переобучения в такой интерпретации — хищник выталкивает жертву из узких минимумов.

**Благодарности.** Доклад подготовлен за счет гранта Российского научного фонда № 24–11–00039.

## Литература

1. *Kozyrev S. V.* How to explain grokking. — 2024. — DOI: `10.48550/ARXIV.2412.18624`.
2. *Kozyrev S. V., Lopatin I. A., Pechen A. N.* Control of Overfitting with Physics. — 2024. — DOI: `10.48550/ARXIV.2412.10716`.

[1]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Email: kozyrev@mi-ras.ru

## Понятие гамильтониана в квантовой механике

И. Л. Курбаков[1]

Дается применимое к квантовой механике пространство пробных фоковских векторов и сходимость в этом пространстве. Из минимальных физических соображений формулируется понятие гамильтонова функционала (гамильтониана).

Математическая постановка задачи соответствует следующим постулативным условиям:

●) Невозможность точного измерения (в смысле, с нулевой погрешностью). В силу этого:

– функция ядра интегральной свертки физичного оператора — обобщенная,
– а вектора состояний допускают процедуру пополнения.

●) Квадратичные формы средних значений как полной энергии (отсчитанной от своего значения в вакууме), так и полного импульса — обе конечные. Это дает нам возможность строить теорию в функциональном (в смысле, не операторном) формализме.

●) Однородные граничные условия первого рода (внутренняя задача Дирихле).

●) Термодинамические свойства: полнота собственного базиса и конечность «гиббсовского» следа.

[1]Институт Спектроскопии РАН, г. Троицк, г. Москва. Email: kurbakov_igor@mail.ru

## О топологически градуированных полугрупповых $C^*$-алгебрах

Е. В. Липачева[1]

Пусть $S$ — полугруппа с левым сокращением и $G$ — группа. В докладе излагается метод построения топологической градуировки приведенной полугрупповой $C^*$-алгебры $C_r^*(S)$ над группой $G$. Приведенная полугрупповая $C^*$-алгебра — это операторная алгебра, порожденная левым регулярным изометрическим представлением полугруппы $S$.

В предположении, что существует сюръективный гомоморфизм $\sigma : S \longrightarrow G$, мы вводим понятие $\sigma$-индекса операторного монома. Это понятие лежит в основе метода построения топологической градуировки полугрупповой $C^*$-алгебры $C_r^*(S)$.

Построенная топологическая градуировка применяется к изучению структур и свойств банаховых и гильбертовых модулей на подлежащем пространстве приведенной полугрупповой $C^*$-алгебры $C_r^*(S)$. В частности, формулируются условия, при которых эти модули являются свободными и проективными.

Доклад основан на результатах статей [1—3].

### Литература

1. *Липачева Е. В.* О градуированных полугрупповых $C^*$-алгебрах и гильбертовых модулях // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. — 2021. — № 313. — С. 131—142.

2. *Lipacheva E. V.* A semigroup $C^*$-algebra which is a free Banach module // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — 42(10). — P. 2386–2391.

3. *Lipacheva E. V.* Extensions of semigroups by the dihedral groups and semigroup $C^*$-algebras // Journal of Algebra and Its Applications. — 2022. — Oct. — Vol. 23, no. 02. — ISSN 1793-6829. — DOI: `10.1142/s0219498824500221`.

[1]Казанский государственный энергетический университет. Email: elipacheva@gmail.com

# Аппроксимации решений стохастического уравнения теплопроводности и уравнения Белавкина

А. А. Лобода[1]

Для задачи Коши для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом

$$d\varphi(t) = \left[\left(-i\widehat{H} - \frac{\mu_1}{2}k^2(\hat{q}) - \frac{\mu_2}{2}h^2(\hat{p})\right)(\varphi(t))\right]dt- \\ - \sqrt{\mu_1}k(\hat{q})(\varphi(t))dW_1(t) - \sqrt{\mu_2}h(\hat{p})(\varphi(t))dW_2(t),$$

где $\widehat{H}$ — это внутренний гамильтониан наблюдаемой системы, а $k(\hat{q})$ и $h(\hat{p})$ — некоммутирующие дифференциальные операторы в работе [1] были построены черновские аппроксимации интегрального представления решения (по обобщённой мере). При этом использовалось обобщение на стохастический случай теоремы Чернова, полученное в работе [4].

Однако возможен и иной подход, в котором белый шум в правой части евклидова аналога уравнения Белавкина (для простоты рассматриваем одномерный белый шум)

$$d\varphi(t) = (\varphi(t))''\,dt + V(q)\varphi(t)dt - \frac{\lambda}{4}q^2\varphi(t)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\varphi(t)dw(t)$$

заменяется на обобщённую производную случайной ломанной, приближающей винеровский процесс (см. [6]). При этом интегральное представление решения задачи Коши для такого уравнения может иметь вид

$$F_k(t_1,t_2)h = \int\limits_{C_0[t_1,t_2]} (h(q+\xi(t_2))) \times \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} V(q+\xi(\tau))d\tau - \right. \\ \left. - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q+\xi(\tau))dB_k(\tau)\right\} w_{t_1,t_2}(d\xi),$$

[1]МГУ им. М. В. Ломоносова. Email: orion1312@yandex.ru

где $B_k$ – случайная функция, определенная на отрезке $[t_1, t_2]$, график которой представляет собой ломаную, проходящую через точки $(\frac{g}{k}, B(\frac{g}{k}))$, $g = 1, 2, \dots, k$, причем предполагается, что никаких изломов вне перечисленных точек этот график не имеет. Про получение такого интегрального представления можно прочитать в работах [2] и [3]. Такой вид не является единственным, а с его помощью могут быть получены разные интегральные представления решений уравнения Белавкина. Интересны вопросы о построении для таких представлений решений черновских аппроксимаций. При этом представления решений различаются мерами, по которым производится интегрирование. Отдельный интерес представляет изучение этих мер и соответствующих им случайных процессов (подробнее см. [5]).

## Литература

1. *Gough J., Obrezkov O. O., Smolyanov O. G.* Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Schrödinger-Itô stochastic equations // Izvestiya: Mathematics. — 2005. — Vol. 69, no. 6. — P. 1081–1098.
2. *Loboda A. A.* Itô Method for Proving the Feynman – Kac Formula for the Euclidean Analog of the Stochastic Schrödinger Equation // Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, no. 4. — P. 557–561.
3. *Loboda A. A.* The Doss Method for the Stochastic Schrödinger – Belavkin Equation // Mathematical Notes. — 2019. — Vol. 106, no. 2. — P. 311–315.
4. *Obrezkov O. O., Smolyanov O. G., Truman A.* The Generelized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Mathematics. — 2005. — Vol. 71, no. 1. — P. 105–110.
5. *Orlov Yu. N., Sakbaev V. Z.* Feynman – Kac Formulas for Difference-differential Equations of Retarded Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, no. 6. — P. 2567–2576.
6. *Orlov Yu. N., Sakbaev V. Z., Shmidt E. V.* Compositions of Random Processes in a Hilbert Space and Its Limit Distribution // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 4. — P. 1432–1447.

# Необходимые условия положительности топологической энтропии непрерывных отображений дендритов

Е. Н. Махрова[1]

Для одномерных динамических систем, заданных на отрезке, существуют критерии положительности/равенства нулю топологической энтропии (см., например, [1, Глава 3, §3, Теорема 3.11]). Если $f : I \to I$ – непрерывное отображение отрезка $I$ в себя, то следующие утверждения эквивалентны:
(1) топологическая энтропия отображения $f$ положительная;
(2) $f^n$ имеет подкову при некотором $n \in \mathbb{N}$;
(3) существуют гомоклинические траектории;
(4) существует траектория, $\omega$-предельное множество которой содержит, по-крайней мере, два минимальных множества;
(5) существует периодическая точка периода, не равного $2^k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.

В докладе изучается связь (1) с (2) – (5) у непрерывных отображений, заданных на дендритах (локально связных континуумах, не содержащих дуг, гомеоморфных окружности). Отметим, что для указанных отображений установлены следующие факты:
(1) $\not\Rightarrow$ (2), (3), (4), (5) (см. [3]);
(3) $\not\Rightarrow$ (1), (2), (4), (5) (см. [2]);
(4) $\not\Rightarrow$ (2) (см. [4]);
(5) $\not\Rightarrow$ (1), (2), (3), (4) (см. [2]).

В докладе описывается структура дендритов, на которых непрерывные отображения с положительной топологической энтропией обладают свойствами (2) – (5). Также будет показана ключевая роль существования минимального бесконечного множества у заданного отображения на дендрите при установлении указанных связей.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00242, rscf.ru/project/24-21-00242.

[1]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского.
Email: elena_makhrova@inbox.ru

## Литература

1. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев : Наук. думка, 1986. — 280 с.
2. *Efremova L. S., Makhrova E. N.* // Prog. Nonlinear Sci. (Int. conf. dedicated to the 100th anniversary of A. A. Andronov 2021). — 2002. — Vol. 1. — P. 225–228.
3. *Kočan Z., Kornecká-Kurková V., Málek M.* Entropy, horseshoes and homoclinic trajectories on trees, graphs and dendrites // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2010. — Feb. — Vol. 30. — P. 165–175. — DOI: 10.1017/S0143385709001011.
4. *Kočan Z., Kurková V., Málek M.* Counterexamples of continuous maps on dendrites // Journal of Difference Equations and Applications. — 2015. — Sept. — Vol. 22. — P. 1–18. — DOI: 10.1080/10236198.2015.1081385.

## Уравнение для нейтрино с ненулевой массой

Н. Г. Марчук[1]

Существование нейтрино было предсказано В. Паули в 1930 году и открыто в 1956 году. Обнаружено, что нейтрино является очень легкой (возможно безмассовой) левокиральной частицей, а антинейтрино — правокиральной частицей. В 1957 году в статьях Ландау, Салама, Ли и Янга предложено описывать нейтрино уравнением Вейля. Именно это уравнение для нейтрино вошло в Стандартную Модель. В 1998 году в эксперименте на детекторе Супер-Камиоканде были обнаружены (а потом подтверждены многими экспериментами) осцилляции нейтрино. Теоретическое обоснование возможности осцилляций нейтрино дал Б. Понтекорво еще в 1957 году. В дальнейшем теория осцилляций нейтрино развивалась многими авторами, в том числе из группы Понтекорво. Интерпретация экспериментальных данных с помощью теории нейтринных осцилляций указывает на возможность того, что некоторые (или все) из трех флейворов нейтрино $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ имеют ненулевые массы и, в этом случае, не могут описываться уравнением Вейля. В связи с этим стал актуальным вопрос об уравнении для описания нейтрино с ненулевой массой. В литературе список уравнений, рассматриваемых в настоящее время в качестве кандидатов на уравнение для нейтрино с ненулевой массой, состоит из уравнения Дирака (1928) и уравнения Майораны (1937). Мы предлагаем дополнить этот список еще одним уравнением для пары левокиральных спиноров Вейля, которое и обсуждается в докладе.

**Благодарности.** Представленные результаты подготовлены в результате проведения исследования в рамках проекта Зеркальные лаборатории НИУ ВШЭ «Кватернионы, геометрические алгебры и приложения».

### Литература

1. *Марчук Н. Г.* Класс полевых уравнений для нейтрино с ненулевой массой // ТМФ. — 2024. — Т. 219, № 3. — С. 422—439.

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».
Email: nmarchuk@mi-ras.ru

# Лог-Соболевское неравенство на метрическом пространстве Грушина

В. А. Маркашева[1]

В работе содержится одно из возможных доказательств Лог-Соболевского неравенства на метрическом пространстве Грушина.

[1]Московский физико-технический институт.
Email: markasheva.va@gmail.com

# Спектральный анализ одномерного оператора Шрёдингера со сдвигом в свободном члене

Д. И. Борисов[1], Д. М. Поляков[2].

В настоящем докладе мы рассматриваем одномерный оператор Шрёдингера, который возмущен оператором сдвига. Основная цель работы — получить асимптотику собственных значений для больших номеров, которая будет равномерна по параметру сдвига. Ранее (см. [1] и используемую там литературу), в основном, изучались задачи для отдельных модельных случаев операторов, которые содержали малый параметр при старшей производной.

Дадим подробную постановку задачи. В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ вида $\mathcal{A}y = -y''$, который мы будем считать невозмущенным. В качестве области определения оператора $\mathcal{A}$ будет выступать пространство $\mathring{W}_2^2(0,1)$, т. е. подпространство функций из пространства Соболева $W_2^2(0,1)$, обращающихся в нуль на концах отрезка. При этом оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен.

Введем в рассмотрение два вспомогательных оператора. Через $\mathcal{L}$ обозначим оператор продолжения нулем вне интервала $(0,1)$, который рассматриваем как действующий из $L_2(0,1)$ в $L_2(\mathrm{R})$, а через $\mathcal{R}$ — оператор сужения на $(0,1)$, действующий из $L_2(\mathrm{R})$ в $L_2(0,1)$. Оба введенных оператора задаются следующим образом: $\mathcal{L}y = y$ в $(0,1)$ и $\mathcal{L}y = 0$ вне $(0,1)$, а также $\mathcal{R}y = y$ на $(0,1)$. Далее в $L_2(\mathrm{R})$ определим оператор $\mathcal{T}^\alpha$ сдвига $(\mathcal{T}^\alpha y)(x) = y(x+\alpha)$, где $\alpha \in [0,1]$.

Пусть $V$ и $S$ — комплекснозначные функции из пространства $C^1[0,1]$. Тогда для произвольной функции $y \in L_2(0,1)$ основной возмущающий оператор $\mathcal{B}^\alpha$ в пространстве $L_2(0,1)$ действует следующим образом:

$$(\mathcal{B}^\alpha y)(x) = -V(x)y(x) - S(x)\big(y(x+\alpha) - y(x)\big),$$

[1]Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН.

[2]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН. Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН. Email: DmitryPolyakow@mail.ru

где функция $y$ считается продолженной нулем вне отрезка $[0,1]$, а результат действия сужается на данный отрезок. Хорошо видно, что при $\alpha = 0$ оператор $\mathcal{B}^\alpha$ превращается в обычный оператор умножения на потенциал $-V$, а при $\alpha = 1$ — в оператор умножения на потенциал $-V + S$. Таким образом, основным объектом изучения в настоящей работе является оператор $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{A} - \mathcal{B}^\alpha$, действующий в $L_2(0,1)$ на области определения $\mathring{W}_2^2(0,1)$.

Несложно установить, что оператор $\mathcal{H}^\alpha$ имеет компактную резольвенту и его спектр состоит из счетного числа собственных значений с единственной точкой накопления в бесконечности. Обозначим собственные значения через $\lambda_n$, $n \in \mathrm{N}$, и пронумеруем их в порядке возрастания их модулей. Через $\chi_I = \chi_I(x)$ будем обозначать характеристическую функцию отрезка $I$ на вещественной прямой.

Наш основной результат посвящен асимптотике собственных значений оператора $\mathcal{H}^\alpha$ при больших номерах $n$.

**Теорема 1.** *Для собственных значений $\lambda_n$ оператора $\mathcal{H}^\alpha$ справедлива следующая асимптотика*

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 + 2\int\limits_0^1 V(x)\sin^2 \pi n x\, dx$$

$$+2\int\limits_0^1 S(x)\sin \pi n x\Big(\chi_{[0,1-\alpha]}(x)\sin \pi n(x+\alpha) - \sin \pi n x\Big)\, dx$$

$$-\frac{\sin \pi n\alpha}{2\pi n}\int\limits_0^1 (S(x)-V(x))\left(\int\limits_{\max\{0,x-\alpha\}}^{x} S(t)\,dt - \alpha\int\limits_0^{1-\alpha} S(t)\,dt\right) dx$$

$$+\frac{\sin 2\pi n\alpha}{2\pi n}\int\limits_0^{1-\alpha} S(x)\left(\int\limits_{\max\{0,x-\alpha\}}^{x} S(t)\,dt - \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^{1-\alpha} S(t)\,dt\right) dx + O(n^{-2}),$$

*при $n \to +\infty$. Оценка остаточного члена равномерна по $\alpha \in [0,1]$.*

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00009, rscf.ru/project/23-11-00009.

## Литература

1. *Шкаликов А. А.* О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи // Матем. заметки. — 1997. — Т. 62, № 6. — С. 950—953.

# Оценки на скорость сходимости в теореме Чернова об аппроксимации экспонент от линейных операторов

О. Е. Галкин[1], И. Д. Ремизов[2].

Экспоненту от конечной матрицы и от линейного ограниченного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве можно задать стандартным степенным рядом для экспоненты, который сходится по обычной норме операторов - полностью аналогично нахождению экспоненты от вещественного числа. Если оператор замкнутый, но не ограниченный, то он определён не всюду и ряд по его степеням — весьма неудобный объект, и он не подходит для определения экспоненты.

Однако, разумный аналог экспоненты для неограниченного оператора всё же существует, соответствующий объект называет сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов (краткое название этого объекта: $C_0$-полугруппа). В отличие от степенного ряда, само определение $C_0$-полугруппы не даёт никакого метода для вычисления экспоненты даже приближённо. Тем не менее, такие методы есть, но они требуют вычисления резольвенты оператора, а это зачастую сложная задача. Однако, если известна так называемая операторно-значная функция Чернова для оператора A, то экспоненту от A можно выразить в виде предела произведения некоторых построенных по функции Чернова ограниченных операторов при стремящемся к бесконечности числе сомножителей. Теорема Чернова — это бесконечномерный вариант теоремы о «втором замечательном пределе» из курса элементарного анализа.

Докладчикам удалось доказать примерно следующее: если функция Чернова имеет один с полугруппой многочлен Тейлора порядка $k$ и мало уклоняется от своего многочлена Тейлора, то черновские аппроксимации полугруппы, построенные по этой функции Чернова, имеют скорость сходимости не хуже, чем порядка $1/n^k$, где $n$ — номер аппроксимации. Заметим, что нетривиален даже одномерный аналог этого результата — когда вычисляется экспонента не от оператора, а от вещественного числа.

[1]НИУ ВШЭ, Нижний Новгород. Лаборатория топологических методов в динамике. Email: ivremizov@yandex.ru

[2]НИУ ВШЭ, Нижний Новгород. Лаборатория топологических методов в динамике.

В докладе будет дано элементарное введение в тематику, рассказано о приложениях и сформулирована теорема об оценках на скорость сходимости черновских аппроксимаций.

Доклад основан на результатах недавно вышедшей в Israel Journal of Mathematics статьи докладчиков [1].

**Благодарности.** Работа выполнена в Лаборатории топологических методов в динамике НИУ ВШЭ, грант Российского научного фонда № 23-71-30008 «Диссипативная динамика бесконечномерных и конечномерных систем, разработка математических моделей механических, гидродинамических процессов»

## Литература

1. *Galkin O. E., Remizov I. D.* Upper and lower estimates for rate of convergence in the Chernoff product formula for semigroups of operators // Israel Journal of Mathematics. — 2024. — Oct. — ISSN 1565-8511. — DOI: `10.1007/s11856-024-2678-x`.

# Топология многозонных диэлектриков

А. Г. Сергеев[1]

Доклад посвящен математической теории топологических диэлектриков. Так называются твердые тела, обладающие широкой энергетической щелью, которая устойчива относительно малых деформаций, что мотивирует использование топологических методов для их изучения. Будут предложены два метода исследования топологии этих твердых тел и построения их топологических инвариантов. Первый, который можно назвать методом спектрального уплощения, позволяет ввести классифицирующее пространство для гамильтонианов топологических диэлектриков, которое совпадает с грассмановым многообразием. Второй метод, основанный на использовании связности Берри, позволяет построить топологический инвариант, называемый инвариантом Черна, для двумерных диэлектриков

**Благодарности.** При подготовке этого доклада автор пользовался финансовой поддержкой Российского Научного Фонда (грант № 21-11-00196).

[1]Математический институт РАН имени В. А. Стеклова. Email: sergeev@mi-ras.ru

## О функторах в теории универсальных $C^*$-алгебр

К. А. Шишкин[1]

В работе Т. А. Лоринга [3] был предложен категорный подход к понятию универсальной $C^*$-алгебры, порождённой множеством образующих, удовлетворяющих набору соотношений. В рамках этого подхода, вместо явно заданных соотношений, рассматриваются категории представлений для соотношений, удовлетворяющие ряду естественных аксиом. Такие категории называются $C^*$-соотношениями. В [4] было показано, что всякое $C^*$-соотношение, определяющее универсальную $C^*$-алгебру, изоморфно категории $*$-полиномиальных соотношений. Иначе говоря, порождающие соотношения соответствующей универсальной $C^*$-алгебры могут быть представлены множеством инволютивных полиномов от порождающих элементов. В [2] был установлен категорный критерий для существования универсальной $C^*$-алгебры для заданного множества порождающих соотношений.

В докладе обсуждается результат из работы [1] о том, что всякий функтор между $C^*$-соотношениями, с точностью до изоморфизмов категорий, является функтором между *-полиномиальными соотношениями, заданными на одном и том же множестве. При этом соответствующие универсальные $C^*$-алгебры являются изоморфными.

### Литература

1. *Шишкин К. А.* Функторы между $C^*$-соотношениями / Известия вузов. Математика. (в печати).
2. *Gumerov R. N., Lipacheva E. V., Shishkin K. A.* Categorical criterion for existence of universal C*-algebras // Ufa Math. J. — 2024. — 16(3). — P. 113–124.
3. *Loring T. A.* $C^*$-algebra relations // Math. Scand. — 2010. — No. 107. — P. 43–72.
4. On $C^*$-algebra and $*$-polynomial relations / I. S. Berdnikov [et al.] // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — 44(6). — P. 1988–1995.

[1]Казанский (Приволжский) Федеральный Университет. Email: keril911@gmail.com

# Квантовая чувствительность, основанная на состояниях подобных Мерседес-Бенца и компаса

Р. Сингх[1], А. Е. Теретенков[2]

В работе используется и развивается подход квантовой чувствительности рассмотренный для сжатого и не сжатого четного когерентного состояния кота Шредингера [1]. Вычисляются значения квантовой чувствительности по параметру сдвига $\delta$ и фазы $\theta$ для состояний, подобных Мерседес-Бенца и компаса. Состояния подобные Мерседес-Бенца и компаса формируются на основе реализации спонтанного параметрического процесса и квадратичной восприимчивости $\chi^{(2)}$. Для реализации квантовой чувствительности находятся средние значения оператора сдвига $\hat{D}(\delta) = \exp\{(\delta\hat{a}^\dagger - \delta^*\hat{a})\}$ на амплитуду $\delta$ и оператора сдвига фазы $\hat{U}(\theta) = \exp\{(-i\theta\hat{a}^\dagger\hat{a})\}$ на угол $\theta$. Параметры квантовой чувствительности $\gamma_1(\delta)$ и $\gamma_2(\theta)$ определяются на основе минимальных значений параметров $\delta$ и $\theta$, при которых $\gamma$ стремится к $0$. Полученные результаты квантовой чувствительности сравниваются с известными состояниями на основе кубической нелинейности $\chi^{(3)}$.

## Литература

1. *Singh R., Teretenkov A. E.* Quantum sensitivity of squeezed Schrodinger cat states // Physics Open. — 2024. — Feb. — Vol. 18. — P. 100198. — ISSN 2666-0326. — DOI: `10.1016/j.physo.2023.100198`.

[1]Независимый исследователь, г. Домодедово, Россия.
Email: ranjit.singh@mail.ru
[2]Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

# Задачи оптимального управления для системы уравнений Максвелла в квазистационарных приближениях

А. А. Тюхтина[1], А. В. Калинин[2].

Обсуждаются постановки задач оптимального управления источниками для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом и квазистационарном электромагнитном приближениях [4] в неоднородных проводящих средах. Целевые функционалы включают отклонение электрического и магнитного полей от полей заданной конфигурации в финальный момент времени и учитывают джоулевы потери. Рассматриваемые задачи относятся к неклассическим эволюционным задачам математической физики (производная по времени находится под действием оператора проекции на пространство потенциальных векторных полей). Задачи оптимального управления трактуются как задачи выпуклой оптимизации в гильбертовых пространствах [2]. На основании классических подходов, основанных на построении сопряженных задач [1; 3; 5], получены необходимые условия оптимальности первого порядка для рассматриваемых задач.

В качестве управления рассматриваемыми системами дифференциальных уравнений используется плотность тока источников, целевой функционал включает отклонение электрических и магнитных полей от полей заданной конфигурации на конечном временном промежутке с учетом джоулевых потерь.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, rscf.ru/project/23-21-00440.

## Литература

1. *Агошков В. И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М. : ИВМ РАН, 2003.

[1]Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. Email: tyukhtina@iee.unn.ru.

[2]Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского.

2. *Мину М.* Математическое программирование: Теория и алгоритмы. — М. : Наука, 1990.

3. *Fursikov A. V.* Optimal Control of Distributed Systems: Theory and Applications. — Providence : American Mathematical Society, 2000.

4. *Kalinin A. V., Tyukhtina A. A.* Hierarchy of models of quasi-stationary electromagnetic fields // MMST 2020, Revised Selected Papers. CCIS, v. 413. Springer. — 2021. — P. 77–92.

5. *Lions J.-L.* Some aspects of the optimal control of distributed parameter systems. — Philadelfia : SIAM, 1972.

# Прямая и обратная теоремы Чернова для bi-непрерывных полугрупп

А. В. Уткин[1]

Доклад посвящен изучению условий, при которых итерации Чернова $\mathbf{F}_{t/n}^n$ операторнозначной функции $\mathbf{F}\colon [0,T] \mapsto \mathcal{L}(X)$ аппроксимируют bi-непрерывную полугруппу на банаховом пространстве $X$, снабженном также локально выпуклой метризуемой когерентной топологией $\tau$. Аналог теоремы Чернова для bi-непрерывных полугрупп, приведенный в работе [2], содержит ряд достаточных условий на семейство операторов $\{\mathbf{F}_t\}$, при которых для любого $f \in X$ справедливо $\mathbf{F}_{t/n}^n f$ bi-сходится к действию некоторой bi-непрерывной полугруппы $\{\mathbf{T}_t\}$ на вектор $f$.

Основная деятельность ведется в сторону ослабления условий, данных в теореме Чернова ([2, Theorem 4.1]). Обозначим $\mathbf{L} = \mathbf{F}_0'$ оператор с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \left\{ f \in X \,\middle|\, \exists \,\mathrm{bi} \lim_{t\to+0} \frac{\mathbf{F}_t - \mathbf{I}}{t} f = \mathbf{F}_0' \right\}$$

В частности, в случае, когда $\mathbf{F}_t\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_s\mathbf{F}_t$ для всех $t, s \in [0,T]$, удается опустить условие bi-плотности подпространств $\mathcal{D}(\mathbf{L})$ и $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{L})\mathcal{D}(\mathbf{L})$. Ценой этому становится необходимость ограничения на bi-замыкание подпространства $\mathcal{D}(\mathbf{L})$.

В работе А. Ю. Неклюдова [1] исследовался вопрос об обращении теоремы Чернова для сильно непрерывных полугрупп. В настоящем докладе приводится обобщение на случай bi-непрерывных полугрупп.

**Определение 1.** $\mathcal{L}_a$ – подпространство таких $f \in X$, для которых последовательность $\{\mathbf{F}_{t/n}^n f\}$ имеет частичный предел, то есть найдется последовательность $\{n_k\}$, для которой существует bi $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{F}_{t_0 d/n_k}^{n_k} f$, причем для любого $d \in \mathbb{Q}_+$.

**Определение 2.** Пусть $\mathcal{T}_N$ — класс финитных последовательностей $(t_1, t_2, \ldots)$ функций $t_i(t,s)\colon [0,T]^2 \to [0,T]$, для которых

[1]Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.
Email: utkin.av@phystech.edu

$\max_i(t_i) \leqslant \max(t,s)$ и $t_1 + t_2 + \ldots \leqslant N$. Назовем $\mathcal{L}_c$ множество векторов $f \in X$, для которых bi $\lim_{t,s\to 0} \frac{1}{ts}[\mathbf{F}_t, \mathbf{F}_s]\mathbf{F}_{t_1} \ldots \mathbf{F}_{t_n} f = 0$ равномерно по $(t_1, t_2, \ldots) \in \mathcal{T}_N$ для любого $N > 0$.

Будет обсуждаться основная

**Гипотеза.** Пусть $\{\mathbf{F}_t\}$ — локально равномерная bi-равностепенно непрерывная ОЗФ. Тогда на bi-замыкании подпространства $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \cap \mathcal{L}_c \cap \mathcal{L}_a$ существует bi-непрерывная полугруппа, генератор которой расширяет $\mathbf{L}$.

Полученные результаты актуальны в теории марковских процессов и квантовых динамических полугрупп для исследования возможности приближения непрерывных процессов дискретными.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00145.

## Литература

1. *Неклюдов А. Ю.* Обращение теоремы Чернова // Математические заметки. — 2008. — Т. 83, № 4. — С. 581—589.
2. *Albanese A., Mangino E.* Trotter–Kato theorems for bi-continuous semigroups and applications to Feller semigroups // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2004. — Jan. — Vol. 289. — P. 477–492. — DOI: `10.1016/j.jmaa.2003.08.032`.

# Марковский случайный процесс на группе Гейзенберга

М. Б. Вавилов[1]

В работе исследуется модель движения броуновской частицы на $\mathbb{C}^2$. Рассматривается шестимерный случайный процесс, состояния которого описывают координаты частицы и комплексный аналог площади, заметаемой радиусом-вектором точки при её движении по траекториям четырёхмерного броуновского моста.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{C}^2$ движение частицы (точки), координаты которой $x(\tau)$ и $y(\tau)$ принимают комплексные значения и являются независимыми винеровскими процессами:

$$x(\tau) = x_1(\tau) + ix_2(\tau), \quad y(\tau) = y_1(\tau) + iy_2(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t,$$

$$\begin{aligned} x_i(\tau) &= W_{1i}(\tau) - \frac{\tau}{t} W_{1i}(t) + \frac{\tau}{t} X_i, \\ y_i(\tau) &= W_{2i}(\tau) - \frac{\tau}{t} W_{2i}(t) + \frac{\tau}{t} Y_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Введём случайный процесс, состояние которого в каждый момент времени определяется шестимерным вектором $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t),$ $z_1(t), z_2(t))$, который далее будет обозначаться $(x(t), y(t), z(t))$, где $z(t)$ — формальная площадь, задаваемая следующим образом:

$$z = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \tag{2}$$

Плотность вероятности $\mathcal{E}^+(\xi, \eta, \zeta, t_0; X, Y, Z, t)$ перехода этого процесса из произвольного состояния $(\xi, \eta, \zeta)$ при $\tau = t_0$ в состояние $(X, Y, Z)$

[1]Московский государственный университет.
Email: vavilov.mb22@physics.msu.ru

при $\tau = t$:

$$\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t) =$$
$$= \iint\limits_{C_{t_0,\xi;t,X}\times C_{t_0,\eta;t,Y}} \delta\Bigg(Re\Big[S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t)+\zeta+\frac{1}{2}(\xi Y-\eta X)-Z\Big]\Bigg)\times$$
$$\times\,\delta\Bigg(Im\Big[S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t)+\zeta+\frac{1}{2}(\xi Y-\eta X)-Z\Big]\Bigg)\times d_{W(t_0,\xi;t,X)}x\times$$
$$\times\, d_{W(t_0,\eta;t,Y)}y. \quad (3)$$

**Теорема 1.** *Для любых двух фиксированных состояний* $(\xi,\eta,\zeta) = (\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2,\zeta^1,\zeta^2)$ *при* $\tau = t_0$ *и* $(X,Y,Z) = (X^1,X^2,Y^1,Y^2,Z^1,Z^2)$ *при* $\tau = t$ *плотность вероятности перехода* $\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t)$ *из* $(\xi,\eta,\zeta)$ *в* $(X,Y,Z)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^6}\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;\xi_1,\eta_1,\zeta_1,t_1)\cdot$$
$$\cdot\,\mathcal{E}^+(\xi_1,\eta_1,\zeta_1,t_1;X,Y,Z,t)d\xi_1^1d\xi_1^2d\eta_1^1d\eta_1^2d\zeta_1^1d\zeta_1^2 \quad (4)$$

**Теорема 2.** *Функция площади* $S^+(t)$*, заметаемой частицей при движении по траекториям броуновского моста на* $\mathbb{C}^2$*, непрерывна по времени и гёльдерова с показателем* $\alpha < 1/2$.

Эволюция процесса задаётся аналогом уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{sub}}u + Vu, \quad (5)$$

где

$$\Delta_{\mathrm{sub}} = 4\frac{\partial}{\partial x,\bar{x}} + 4\frac{\partial}{\partial y,\bar{y}} + (|x|^2+|y|^2)\frac{\partial}{\partial z,\bar{z}} + 2x\frac{\partial}{\partial\bar{y},z} + 2\bar{x}\frac{\partial}{\partial y,\bar{z}} -$$
$$-\,2y\frac{\partial}{\partial\bar{x},z} - 2\bar{y}\frac{\partial}{\partial x,\bar{z}}. \quad (6)$$

Его решение для функции $V(x,y,S)$, непрерывной и ограниченной снизу на $\mathbb{C}^3$

$$u(X,Y,Z,t)=\iint\limits_{\substack{C[0,t]\times C[0,t]\\ x(0)=0,y(0)=0}}\psi_0\Bigg(x(t)+X,y(t)+Y,Z+$$

$$+\frac{1}{2}(y(t)X-x(t)Y)+\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)dy(\tau)-y(\tau)dx(\tau)\Bigg)\times$$

$$\times\exp\Bigg\{-\int\limits_0^t V\Bigg(x(\tau)+X,y(\tau)+Y,\int\limits_0^\tau \tilde{y}(\theta)d\tilde{x}(\theta)-\tilde{x}(\theta)d\tilde{y}(\theta)+$$

$$+\frac{1}{2}(y(t)x(\tau)-x(t)y(\tau))-\frac{1}{2}(y(t)X-x(t)Y)\Bigg)d\tau\Bigg\}d_Wx\times d_Wy. \quad (7)$$

## Литература

1. Марковский случайный процесс на группе Гейзенберга / И. А. Богатырев [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2025. — Т. 284, № 1. — С. 1—14.

# Математика теории относительности и космология: уравнения Власова и константа Хаббла

В. В. Веденяпин[1], Н. Н. Фимин[2], В. М. Чечеткин[3], А. А. Руссков[4].

Рассмотрены вывод и свойства уравнений Власова-Эйнштейна и Власова-Пуассона и космологические решения.

В классических работах уравнения для полей предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия. Получающийся вывод урав-нений типа Власова даёт уравнения Власова-Эйнштейна отличные от того, что предлагались ранее. Предлагается способ перехода от кинетических уравнений к гидродинамическим следствиям, как это делалось раньше уже самим А. А. Власовым. В случае гамильтоновой механики от гидродинамических следствий уравнения Лиувилля возможен переход к уравнению Гамильтона-Якоби, как это делалось уже в квантовой механике Е. Маделунгом, а в более общем виде В. В. Козловым. Таким образом получаются в нерелятивистском случае решения Милна–Маккри, а также нерелятивистский и релятивистский анализ решений типа Фридмана нестационарной эволюции Вселенной. Это позволяет определить константу Хаббла не на основе метрики, как это делалось ранее, а как положено, на основе наблюдаемой материи, написать уравнения для нее но основе движения материи в заданной метрике, проанализировать Лямбду Эйнштейна и причину ускоренного расширения Вселенной как релятивистский эффект.

## Литература

1. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. — М. : Наука, 1982. — 376 с.

[1]ФИЦ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.
Email: vicveden@yahoo.com

[2]ФИЦ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

[3]ФИЦ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

[4]ФИЦ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

# Уравнение теплопроводности с лапласианом Леви и потоки теплопроводности дифференциальных форм

Б. О. Волков[1][2]

Лапласиан Леви — бесконечномерный лапласиан, который можно определить как среднее Чезаро вторых производных вдоль векторов из некоторого ортонормированного базиса. Этот оператор интересен своей связью с калибровочными полями. Известно, что уравнения Янга–Миллса для связности в векторном расслоении над римановым многообразием эквивалентны уравнению Лапласа с лапласианом Леви для параллельного переноса, порожденного этой связностью [1; 2; 4]. В работе изучается уравнение теплопроводности с лапласианом Леви на бесконечномерном многообразии замкнутых $H^1$-путей на компактном римановом многообразии и поведение его решений при стремлении времени к бесконечности.

Показывается, что решение уравнения теплопроводности для скалярных функций на конечномерном римановом многообразии порождает семейство интегральных функционалов, которое является решением уравнения теплопроводности с лапласианом Леви и стремится к гармоническому для лапласиана Леви функционалу при стремлении времени к бесконечности. Аналогично с помощью результатов работы [3] показывается, что поток теплопроводности 1-форм на компактном ориентированном римановом многообразии (решение уравнения теплопроводности для лапласиана Ходжа-де Рама) порождает решение уравнения теплопроводности с лапласианом Леви, которое стремится к гармоническому для лапласиана Леви функционалу при стремлении времени к бесконечности. Построенное решение уравнение теплопроводности с лапласианом Леви состоит из семейства функционалов, которые можно интерпретировать как параллельные переносы, порожденным $U(1)$-связностями на базовом компактном римановом многообразии. Рассматривается связь между уравнением теплопроводности для лапласиана Леви и потоком теплопроводности Янга–Миллса [4].

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук. Email: borisvolkov1986@gmail.com

[2] Московский физико-технический институт.

**Благодарности.** Работа частично поддержана грантом Российского научного фонда № 24-11-00039, rscf.ru/project/24-11-00039.

## Литература

1. *Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V.* Yang–Mills gauge fields as harmonic functions for the Lévy Laplacian // Russ. J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 2, no. 2. — P. 235–250.
2. *Léandre R., Volovich I. V.* The Stochastic Lévy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. — 2001. — Vol. 4, no. 2. — P. 161–172.
3. *Milgram A. N., Rosenbloom P. C.* Harmonic Forms and Heat Conduction. I: Closed Riemannian Manifolds // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1951. — Vol. 37, no. 3. — P. 180–184. — ISSN 00278424, 10916490. — URL: `http://www.jstor.org/stable/88064` (visited on 01/18/2025).
4. *Volkov B. O.* Levy Laplacian on manifold and Yang–Mills heat flow // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, no. 10. — P. 1619–1630.