МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2025/2026 учебного года

Курс

## **«Нестандартные модели арифметики»**

(лекторы – Беклемишев Лев Дмитриевич,
Сперанский Станислав Олегович)

Стандартная модель арифметики — это структура натуральных чисел с операциями сложения и умножения. В силу теоремы компактности, у первопорядковой теории этой структуры есть счётные нестандартные — т.е. не изоморфные стандартной — модели. Изучение таких моделей проливает свет на вопросы (не)доказуемости арифметических утверждений, приводит к результатам о непротиворечивости и консервативности различных арифметических теорий и т.д.

Исследование арифметики Пеано и её естественных подсистем посредством теоретико-модельных методов — одна из наиболее развитых областей математической логики. Настоящий курс представляет собой введение в эту область. В частности, мы докажем теорему Тенненбаума о том, что у арифметики Пеано нет вычислимых нестандартных моделей, и теорему Париса–Харрингтона, дающую впечатляющий пример комбинаторного утверждения, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть в PA.

ПРОГРАММА

1. Нестандартные модели арифметики: их существование и основные свойства. Описание порядка в нестандартных моделях арифметики.

2. Экскурс в формальную арифметику.

3. Начальные сегменты нестандартных моделей PA. Теорема Париха о $\pi_2$-следствиях для подсистемы $I\Delta_0$.

4. Подсистема PA^- и её модели. Теорема о том, что у каждой разрешимой теорий есть вычислимая модель, и её релятивизации.

5. Теорема Тенненбаума и вариации на неё.

6. Определимые элементы в моделях PA. Простые модели для расширений PA.

7. Аксиомы ограниченности (коллекции). Подсистемы $I\Sigma_n$ и $I\Pi_n$.

8. $\Sigma_n$-определимые элементы и $\Sigma_n$-элементарные начальные сегменты. Результаты о консервативности и независимости для подсистем PA.

9. Теоремы Париса–Харрингтона и Канамори–Макалуна.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *G.S. Boolos, J.P. Burgess, R.C. Jeffrey*, Computability and Logic. 5th edition. Cambridge University Press, 2007.

[2] *P. Hájek, P. Pudlák*, Metamathematics of First-Order Arithmetic. Springer, 1993.

[3] *R. Kaye*, Models of Peano Arithmetic. Oxford University Press, 1991.

[4] *R. Kossak, J. Schmerl*, The Structure of Models of Peano Arithmetic. Oxford University Press, 2006.