МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2025/2026 учебного года

Курс

«Случайные меры»

(руководители – Буфетов Александр Игоревич,
Горбунов Сергей Михайлович)

Колмогоров дал аксиоматику теории вероятностей в рамках формализма случайных величин как измеримых отображений на вероятностных пространствах. Эти отображения могут принимать значения в конечномерных пространствах (случайные вектора), пространствах функций на отрезке (случайные процессы). Точно также можно рассматривать и случайные меры.

Естественность такого взгляда оправдана примерами. В разных задачах — от теории представлений и математической физики до аналитической теории чисел — возникают случайные величины, сами принимающие значения в пространстве мер.

Как ведет себя характеристический многочлен случайной матрицы при устремлении её размера к бесконечности?

К чему на единичной окружности сходится экспонента степенного ряда с независимыми гауссовыми коэффициентами?

Как ведёт себя случайный многочлен, имеющий корнями частицы двумерного кулоновского газа на окружности, при устремлении числа частиц к бесконечности?

Как ведёт себя дзета-функция Римана на бесконечности вдоль критической оси?

Центральным объектом во всех вопросах выше оказывается некоторая случайная голоморфная функция. Во всех пределах выше эта функция асимптотически сильно осциллирует, но имеет предел. Несмотря на гладкость исходной функции, именно взгляд на эту функцию как на случайную меру является ключевым в вопросе существования предела.

Предельная случайная мера — гауссов мультипликативный хаос — построена Жаном-Пьером Каханом, рассматривавшим абсолютно другую задачу. Его конструкция — продолжение работ Мандельброта и Перьера, предложивших строгую интерпретацию появившейся в теории однородной изотропной турбулентности лог-нормальной гипотезы Колмогорова-Обухова.

Интересны и необычные свойства этой меры. Так, она «сконцентрированна» на множестве почти наверное нецелой размерности Хаусдорфа, логарифм момента меры маленького шара не имеет линейную зависимость от порядка момента — явление, называемое мультифрактальным спектром и выражающее сложное локальное поведение. Более неожиданно, эта мера нескоррелирована на дизъюнктных подмножествах, несмотря на существование теоремы единственности для допредельного объекта в примерах выше.

Нашей задачей будет, начиная с основ, разобрать и недавние достижения, среди которых — появление в случайных матричных моделях гауссова мультипликативного хаоса.

ПРОГРАММА

1. Теория Колмогорова однородной изотропной турбулентности. Критика Ландау. Лог-нормальная гипотеза Колмогорова-Обухова.

2. Случайные поля и случайные меры.

3. Гауссов мультипликативный хаос — конструкция Кахана.

4. Гауссов мультипликативный хаос — конструкция Шамова.

5. Гауссов мультипликативный хаос — конструкция Берестицкого.

6. Критический гауссов мультипликативный хаос — конструкция Лакуэна.

7. Гауссов мультипликативный хаос в случайных матричных моделях