

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2025/2026 учебного года

«Семинар по субримановой геометрии»

(руководитель – Локуциевский Лев Вячеславович)

Цель семинара — познакомить участников с современными методами субримановой геометрии на стыке геометрического и алгебраического подходов, с акцентом на её приложения: к нейронным сетям и управлению квантовыми системами.

Особое внимание будет уделено взаимосвязи между геометрической теорией управления, структурой под расслоений и алгебраическими свойствами групп Ли, а также их роли в построении и анализе геодезических на субримановых многообразиях.

Семинар охватывает как классические результаты (например, теорему Рашевского-Чжоу и принцип максимума Понтрягина), так и новые направления (теорема Громова о нильпотентной аппроксимации и теорема Нагано-Суссмана об орбите). Участники получат целостное представление о геометрических и аналитических инструментах, лежащих в основе субримановой геометрии и их приложениях.

ПРОГРАММА

Ниже представлена расширенная версия программы, которая, скорее всего, не поместится в один семестр. Поэтому в первом семестре на семинаре будут рассмотрены темы 1-3. Если у слушателей будет интерес, то планируется продолжить семинар на второй семестр с программой, которая будет корректировкой пунктов 4-6, учитывающей интересы слушателей.

1. Основы и мотивация

1.1 Неголономность и теорема Фробениуса [2].

1.2 Определение субриманового многообразия [1].

1.3 Примеры: почти риманово многообразие, изопериметрические задачи и группа Гейзенберга [1], [3].

- 1.4 Три эквивалентных определения расстояния (отдельный текст)
- 1.5 Нейронные сети ResNet [17].
- 1.6 Теорема об орбите Нагано–Суссмана и теорема Рашевского-Чжоу [2].
- 1.7 Примеры. Управление N-уровневой квантовой системой при помощи 1- и 2- кубитных преобразований (отдельный текст).
- 1.8 Субфинслеровы и сублоренцевы многообразия [11].

2. Аппарат геометрической теории управления

- 2.1 Необходимое условие оптимальности — принцип максимума Понтрягина [2], [3].
- 2.2 Гамильтонов формализм. Лагранжев формализм [2], [3].
- 2.3 Уравнения кратчайших: нормальные и аномальные геодезические. Экстремали на группах Гейзенберга и Энгеля, автомобиль Ридса-Шеппа [2].
- 2.4 Гладкость нормальных геодезических. Экспоненциальное отображение [1].

3. Анализ экстремалей

- 3.1 Существование кратчайших (теорема Филиппова) [8], [2].
- 3.2 Локальная оптимальность строго нормальных экстремалей и сопряженные точки. Пример: группа Гейзенберга [2].
- 3.3 Пример Лиу-Суссмана строго аномальной кратчайшей [12].
- 3.4 Пример аномальной экстремали, которая не является оптимальной ни на каком подотрезке времени [14].
- 3.5 Проблема гладкости аномальных геодезических [14], [1], [18], [5], [10].
- 3.6 Дифференциальное включение X_{cy} [7].

4. Локальная геометрия и асимптотический анализ

- 4.1 Привилегированные координаты [1], [4].
- 4.2 Теорема о яблоке в ящике (ball-box theorem) [1], [4].
- 4.3 Размерность по Хаусдорфу субриemannового многообразия. Хаусдорфова размерность группы Гейзенберга [1], [4].
- 4.4 Группы Карно и финслеровы структуры на них. Их размерность по Хаусдорфу [11].

4.5 Касательный конус и теорема Громова о нильпотентной аппроксимации [4], [1].

5. Алгебраическая структура и интегрируемость

5.1 Левоинвариантные задачи на группах Ли. Тривиализация касательного и кокасательного расслоений [1].

5.2 Гамильтонова редукция и вертикальная подсистема. Пример: группа Гейзенберга [1].

5.3 Пример: управление неголономными механическими системами, качение шара по плоскости, автомобиль Ридса-Шеппа [2].

5.4 Скобка Ли-Пуассона на коалгебре Ли, орбиты коприсоединенного представления, казимиры [9], [19].

5.5 Левоинвариантные уравнения на группах Гейзенберга, Энгеля, Картана, на группе $SO(3)$ [16].

5.6 Интегрируемость уравнений на всех трехмерных группах Ли, на группах Энгеля и Картана. Интегрируемость на одной группе Карно с вектором роста (2,3,5,6) [16], [13].

5.7 Примеры: классификация уравнений на трехмерных группах Ли, уравнения геодезических на всех этих группах и их интегрирование [1].

6. Разное

6.1 Теорема Пансу о дифференцируемости отображения групп Карно [15].

6.2 Объем Поппа [1].

6.3 Суб-лапласианы как гипоэллиптические операторы, условие Хермандера [6].

6.4 Кривизна в субриemannовой геометрии [14], [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Agrachev A. A., Barilliari D., Boscain U. A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry.* Cambridge University Press, 2019. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 181).

[2] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2004.

[3] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

- [4] Gromov M. Carnot-Carathéodory spaces seen from within. In: Sub-Riemannian geometry, Birkhäuser, 1996. P. 79–323. (Progress in Mathematics, Vol. 144).
- [5] Hakavuori E., Le Donne E. Non-minimality of corners in sub-riemannian geometry // Inventiones mathematicae, 206(3). 2016.
- [6] Hörmander L. Hypoelliptic second order differential equations // Acta Mathematica. 1967. Vol. 119. P. 147–171.
- [7] Hsu L. Calculus of Variations via the Griffiths formalism, Differential Geometry, 1992, 36, p. 551-589.
- [8] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. (English translation: Filippov A. F. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Kluwer Academic Publishers, 1988).
- [9] Кириллов А. А. Лекции по методу орбит. Н.: ИДМИ 2002.
- [10] Lokutsievskiy L. V., Zelikin M.I., Derivatives of Sub-Riemannian Geodesics are L_p -Hölder Continuous, ESAIM: COCV, Volume 29, 2023.
- [11] Le Donne E. Metric Lie Groups. Carnot-Carathéodory Spaces from the Homogeneous Viewpoint.
- [12] Liu W., Sussmann H. J. Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions. AMS, v. 118, n. 564, 1995.
- [13] Локуциевский Л. В., Сачков Ю. Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субриemannовых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 5. С. 74–119.
- [14] Montgomery R. A Tour of Subriemannian Geometries, their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 91, 2002.
- [15] Pansu P. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Annals of Mathematics. Second Series. 1989. Vol. 129, No. 1. P. 1–60.
- [16] Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления. – М.: URSS, 2021, 160 С.
- [17] Scagliotti A. Deep learning approximation of diffeomorphisms via linear-control systems // Mathematical Control and Related Fields, 2023, 13(3): 1226-1257. arXiv:2110.12393
- [18] Chitour Y., Jean F., Monti R., Rifford L., Sacchelli L., Sigalotti M., Socionovo A. Not all sub-Riemannian minimizing geodesics are smooth, 2025, arXiv:2501.18920
- [19] Больсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.