

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА

РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2025/2026 учебного года

Курс

«Симметрические функции Макдональда,
двойная аффинная алгебра Гекке
и операторы Данкла»

(лектор — Матушко Мария Георгиевна)

Это вводный курс по теории ортогональных многочленов Макдональда, двойным аффинным алгебрам Гекке (ДАНА) и их роли в современной математике и физике. Мы начнём с основ теории Макдональда, введём кольцо симметричных функций, а также многочлены Шура и Макдональда. Ключевым моментом будет связь между многочленами Макдональда и операторами Чередника-Данкла, которые естественным образом возникают при изучении квантовых многочастичных систем — тригонометрических системах Руйсенаарса. Мы рассмотрим несимметричные обобщения Чередника для ортогональных многочленов и введём двойную аффинную алгебру Гекке (ДАНА). Также мы изучим и рациональную версию, так называемую алгебру Чередника, обсудим приложения и связи с ортогональными многочленами, интегрируемыми системами и комбинаторикой. Подобные конструкции существуют и на эллиптическом уровне; они будут рассмотрены ближе к концу курса.

ПРОГРАММА

1. Кольцо симметричных функций. Элементарные симметричные функции, полные симметричные функции и степенные суммы Ньютона. Многочлены Шура.
2. Формулы Коши. Скалярное произведение на симметрических функциях. Ортонормированность многочленов Шура.
3. Полиномы Макдональда, скалярное произведение, ортогональность. Разностные операторы Макдональда, их производящая функция. Самосопряженность. Вырождение в полиномы Джека.

4. Группы Кокстера и алгебры Гекке. Системы корней, группа Вейля, диаграммы Дынкина.
5. Полиномы Макдональда для произвольной системы корней. Теорема существования. Гипотеза о норме, постоянный член.
6. Скалярное произведение Чередника. Несимметричные многочлены Макдональда. Операторы Чередника-Данкла.
7. Рациональные алгебры Чередника и операторы Данкла. Приложения к многочастичным интегрируемым системам.
8. Аффинные группы Вейля и аффинные алгебры Гекке. Двойные аффинные алгебры Гекке и операторы Чередника.
9. Интегрируемые системы Калоджеро и Макдональда-Руйсенарса. Связь операторов Данкла и матрицы Лакса.
10. Эллиптические алгебры Чередника и эллиптические операторы Данкла. Приложения: эллиптическая система Калоджеро-Мозера, спиновая цепочка Иноземцева.
11. Эллиптические операторы Чередника и системы Руйсенарса. R -матричные обобщения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *I.G. Macdonald*, Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials. Vol. 12. American Mathematical Soc., 1998.
- [2] *I. Cherednik*, Double Affine Hecke Algebras Vol. 319. Cambridge University Press, 2005.
- [3] *Kirillov Jr, A.*, Lectures on affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures. Bull. AMS 34, no. 3, 251-292, 1997.
- [4] *Etingof, P.*, Calogero-Moser systems and representation theory. Vol. 4. European Mathematical Society, 2007.
- [5] *Chalykh, O.*, Dunkl and Cherednik Operators. Encyclopedia of Mathematical Physics (Second edition), vol. 3, 309-327. Academic Press, 2025.