МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР МИРОВОГО УРОВНЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Осенний семестр 2025/2026 учебного года

Курс

«Комплексная геометрия многообразий с действием тора»

(руководитель – Панов Тарас Евгеньевич)

Торическая геометрия и топология предоставляют большое количество примеров многообразий с «нестандартными» комплексными структурами, т.е. не кэлеровыми и даже не мойшезоновыми. Одним из основных классов таких примеров являются момент-угол-многообразия.

Комплексная структура на момент-угол-многообразии Z определяется набором комбинаторных геометрических данных, включающий полный симплициальный (но не обязательно рациональный) веер. Примерами комплексных момент-угол-многообразий являются многообразия Хопфа и Калаби-Экмана, а также их деформации.

В случае рациональных вееров многообразие Z является тотальным пространством голоморфного расслоения над торическим многообразием со слоем - компактным комплексным тором. В этом случае инварианты комплексной структуры на Z, такие как когомологии Дольбо и числа Ходжа, могут быть описаны с помощью спектральной последовательности Бореля голоморфного расслоения.

В общем случае слои голоморфного расслоения «размыкаются» и расслоение превращается в каноническое голоморфное слоение на комплексном момент-угол-многообразии Z, эквивариантное относительно действия алгебраического тора. Пара (Z, F) многообразия и голоморфного слоения является моделью для иррациональных торических многообразий.

В общем положении комплексное момент-угол-многообразие Z имеет лишь конечное число комплексных подмногообразий положительной размерности, так что на таком комплексном многообразии не существует непостоянных мероморфных функций, а его алгебраическая размерность равна нулю.

Конструкция и классификация комплексных многообразий с действием тора основана на понятии экспоненциального действия, задаваемого конфигурацией векторов. Экпоненциальные действия объединяют многие конструкции голоморфной динамики, некэлеровой комплексной геометрии, торической геометрии и топологии. К ним относятся пространства листов голоморфных слоений, пересечения вещественных и эрмитовых квадрик, фактор-конструкция торических многообразий, LVM- и $LVMB$-многообразия, комплексно-аналитические структуры на момент-угол-многообразиях и их частичные факторы.

Во всех случаях геометрия и топология соответствующего фактор-объекта могут быть описаны комбинаторными данными, включающих пару двойственных по Гейлу конфигураций векторов.

ПРОГРАММА

1. Экспоненциальные действия и голоморфные слоения, свободные орбиты (невырожденные листы).

2. Линейная двойственность Гейла.

3. Вееры и триангулированные конфигурации векторов.

4. Собственные действия.

5. Полнота и компактность фактор-пространств.

6. Полиэдральные произведения и момент-угол-многообразия.

7. Выпуклые многогранники и полиэдры, нормальные вееры и пересечения квадрик.

8. Голоморфные экспоненциальные действия и комплексные структуры на момент-угол-многообразиях.

9. Двойственность Гейла для рациональных конфигураций.

10. Частичные факторы и тор-эспоненциальные действия.

11. LVM- и $LVMB$-многообразия.

12. Торические многообразия и их иррациональные деформации: дивизоры, Nef-и обильный конусы, симплектическая редукция.

13. Трансверсально кэлеровы формы на комплексных многообразиях с действием тора, дивизоры и подмногообразия.

14. Базисные когомологии де Рама и Дольбо.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Arzhantsev, Ivan; Derenthal, Ulrich; Hausen, Juergen; Laface, Antonio*, Cox Rings. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 144. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[2] *Audin, Michele,* The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Progress in Mathematics, 93. Birkhauser, Basel, 1991.

[3] *Bosio, Frederic; Meersseman Laurent*, Real quadrics in C^n, complex manifolds and convex polytopes. Acta Math. 197 (2006), no. 1, 53-127.

[4] *Buchstaber, Victor; Panov, Taras,* Toric Topology. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[5] *Cox, David A.; Little John B.; Schenck, Henry K.*, Toric varieties. Graduate Studies in Mathematics, 124. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[6] *De Loera, Jesus; Rambau, Joerg; Santos, Francisco,* Triangulations. Structures for Algorithms and Applications. Algorithms Comput. Math., 25, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[7] *Guillemin, Victor*, Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n-spaces. Progress in Mathematics, 122. Birkhaeuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[8] *Ishida, Hiroaki*, Complex manifolds with maximal torus actions. J. Reine Angew. Math. 751 (2019), 121-184.

[9] *Katzarkov, Ludmil; Lupercio, Ernesto; Meersseman, Laurent; Verjovsky, Alberto*, Quantum (non-commutative) toric geometry: foundations. Adv. Math. 391 (2021), Paper No. 107945, 110 pp.

[10] *Panov, Taras*, Exponential actions defined by vector configurations, Gale duality, and moment-angle manifolds. Bulletin of the London Mathematical Society, 2025; arXiv:2411.03366.

[11] *Panov, Taras; Ustinovskiy, Yury; Verbitsky, Misha*, Complex geometry of moment-angle manifolds. Math. Z. 284 (2016), no. 1-2, 309-333.