Посыпкин Михаил Анатольевич

МЕТОДЫ ГЛОБАЛЬНОЙ И МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ИДЕОЛОГИИ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ И НЕРАВНОМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика

научный консультант: академик РАН **Евтушенко Юрий Гаврилович**

Актуальность работы

- Локальные методы
- Глобальные методы
  - Детерминированные методы (дается оценка отклонения найденного значения от оптимума)
  - Недетерминированные методы (оценка не дается, либо носит вероятностный характер)

Цель работы

Основной целью диссертационной работы является развитие детерминированных методов решения задач оптимизации, основанных на идеологии ветвей и границ и неравномерных покрытий, а также всестороннее теоретическое и экспериментальное исследование их эффективности.

Содержание работы

- Развитие метода неравномерных покрытий
  - Задачи с простыми ограничениями
  - Задачи с функциональными ограничениями
  - Многокритериальные задачи
- Вопросы сложности методов ветвей и границ
  - Сложность метода метода неравномерных покрытий
  - Сложность метода ветвей и границ для задачи о ранце
  - Оценки сложности для параллельного варианта МВГ
- Эффективная реализация на базе программного комплекса, ориентированного на МВС

Развитие метода неравномерных покрытий для случая простых ограничений

- Оптимизация с простыми (параллелепипедными) ограничениями («box-constrained»)

$$f(x) \to \min$$

$$x \in X, \; X = \{x \in R^n : a \le x \le b\}$$

- Требуется найти ε-оптимальное решение

$$x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \le f(x_*) + \varepsilon$$

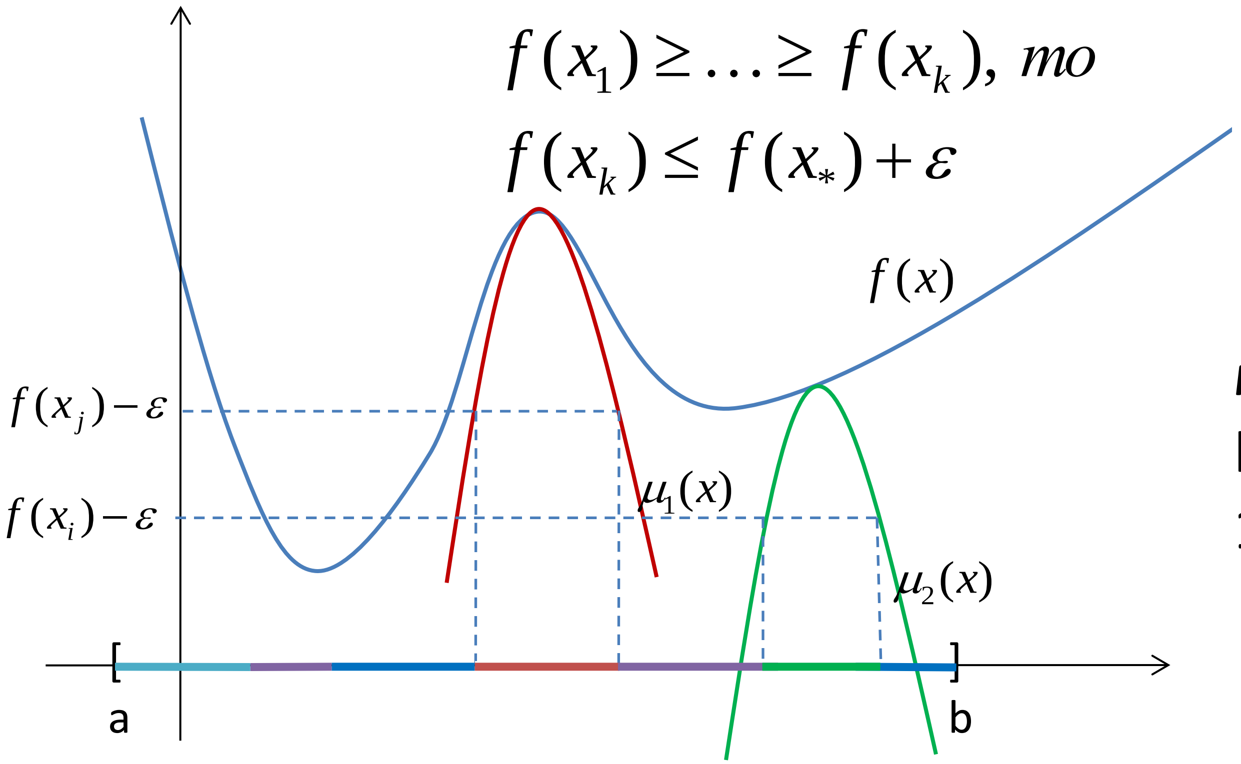
Метод неравномерных покрытий

$$Если\ X = \bigcup_{i=1}^{k} L(\mu_i(\cdot), X_i, f(x_i)-\varepsilon),$$

$$где\ X_i \subseteq X,\ i = 1,\dots,k$$

$$f(x_1) \geq \ldots \geq f(x_k),\ то$$

$$f(x_k) \leq f(x_*) + \varepsilon$$



метод предложен Ю.Г. Евтушенко в 1971 году

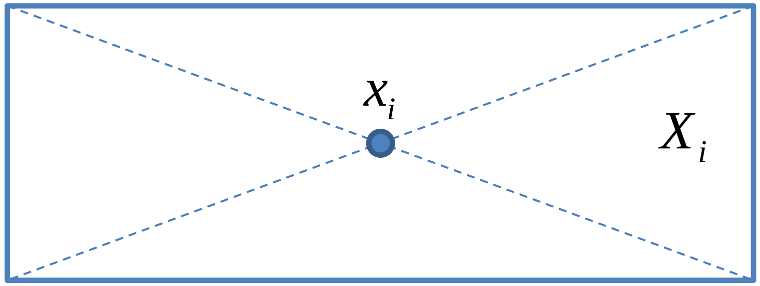
Опорные миноранты

1. Функция удовлетворяет условию Липшица

$$f(x) \geq \mu_i^1(x) = f(x_i) - l_i \|x - x_i\|$$

2. Градиент удовлетворяет условию Липшица

$$f(x) \geq \mu_i^2(x) = f(x_i) + \left\langle f_x(x_i), x - x_i \right\rangle - \frac{L_i}{2} \|x - x_i\|^2$$



Новые миноранты

Пусть спектр Гессиана на множестве X_i заключен в интервал $[k_i, K_i]$, тогда

$$f(x) \geq f(x_i) + \left\langle f_x(x_i), x - x_i \right\rangle + \frac{k_i}{2}\left\| x - x_i \right\|^2$$

$$f(x) \leq f(x_i) + \left\langle f_x(x_i), x - x_i \right\rangle + \frac{K_i}{2}\left\| x - x_i \right\|^2$$

$$\textit{для всех } x \in X_i$$

Методы оценки границ спектра

$$k_i \geq \min_{i=1,..,n} \left(\underline{u_{ii}} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} v_{ij} \right), K_i \leq \max_{i=1,..,n} \left(\overline{u_{ii}} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} v_{ij} \right),$$

где

$$\underline{u_{ij}} \leq \min_{x \in X_i} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \max_{x \in X_i} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i \partial x^j} \leq \overline{u_{ij}},$$

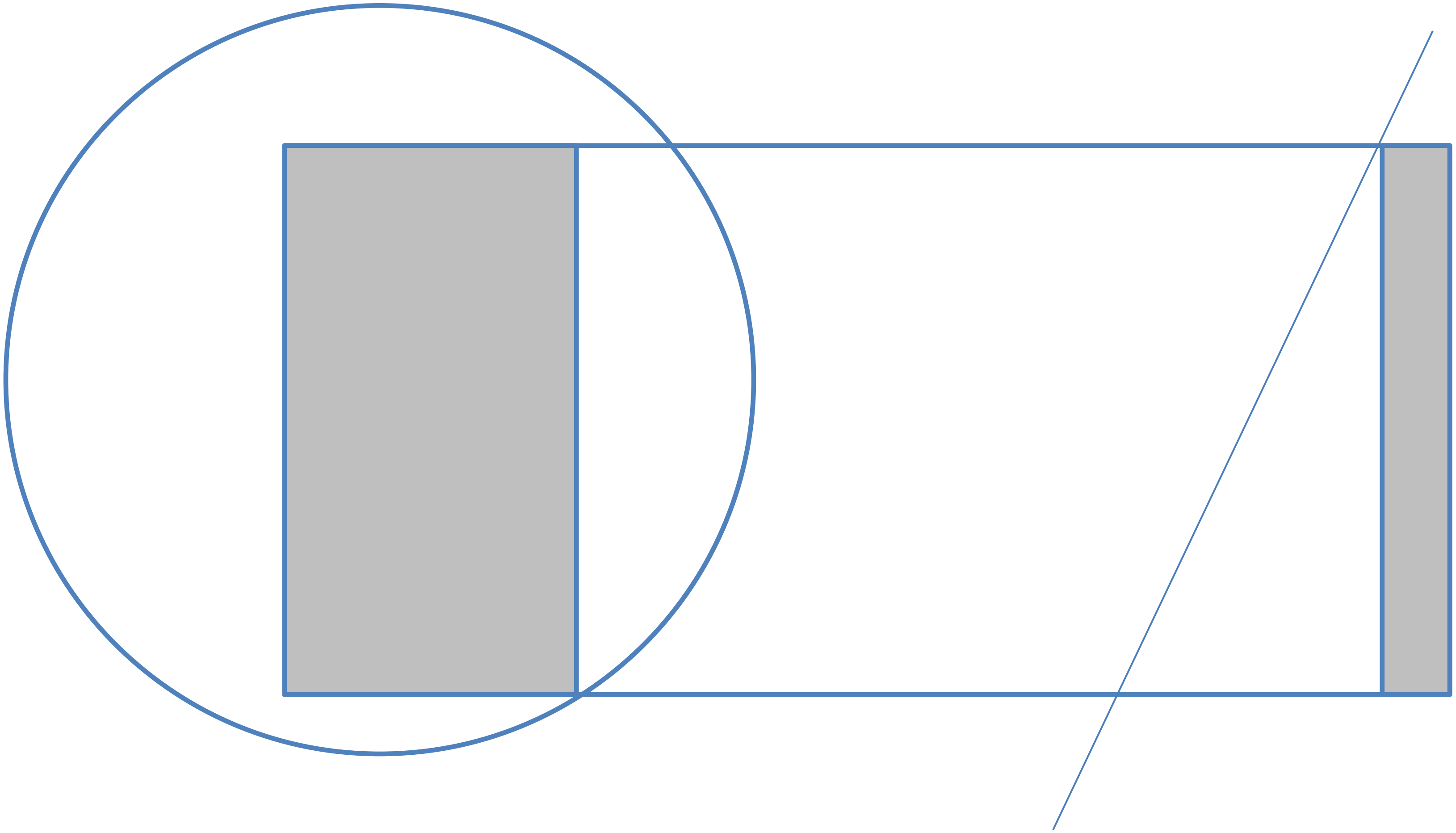
$$v_{ij} = \max(|\underline{u_{ij}}|, |\overline{u_{ij}}|)$$

Учет необходимых условий оптимальности

$$f(x) \geq f(x_i) - \frac{K_i}{2} \left\| x - x_i \right\|^2 \quad \text{для} \quad x \in X_* \bigcap X_i$$

при условии $\quad \partial X \bigcap X_i = \varnothing$

Методы сокращения области поиска



Эксперимент

O0 $$f(x) \geq f(x_i) - l_i \|x - x_i\|$$

O1 $$f(x_i) + \langle f_x(x_i), x - x_i \rangle - \frac{L_i}{2} \|x - x_i\|^2$$

O2 $$f(x) \geq f(x_i) + \langle f_x(x_i), x - x_i \rangle + \frac{k_i}{2} \|x - x_i\|^2$$

O3 $$f(x) \geq f(x_i) - \frac{K_i}{2} \|x - x_i\|^2$$

O3 + $$f(x) \geq f(x_i) - \frac{K_i}{2} \|x - x_i\|^2$$ + методы сокращения

BR BARON

LG LINDOGLOBAL

Эксперимент

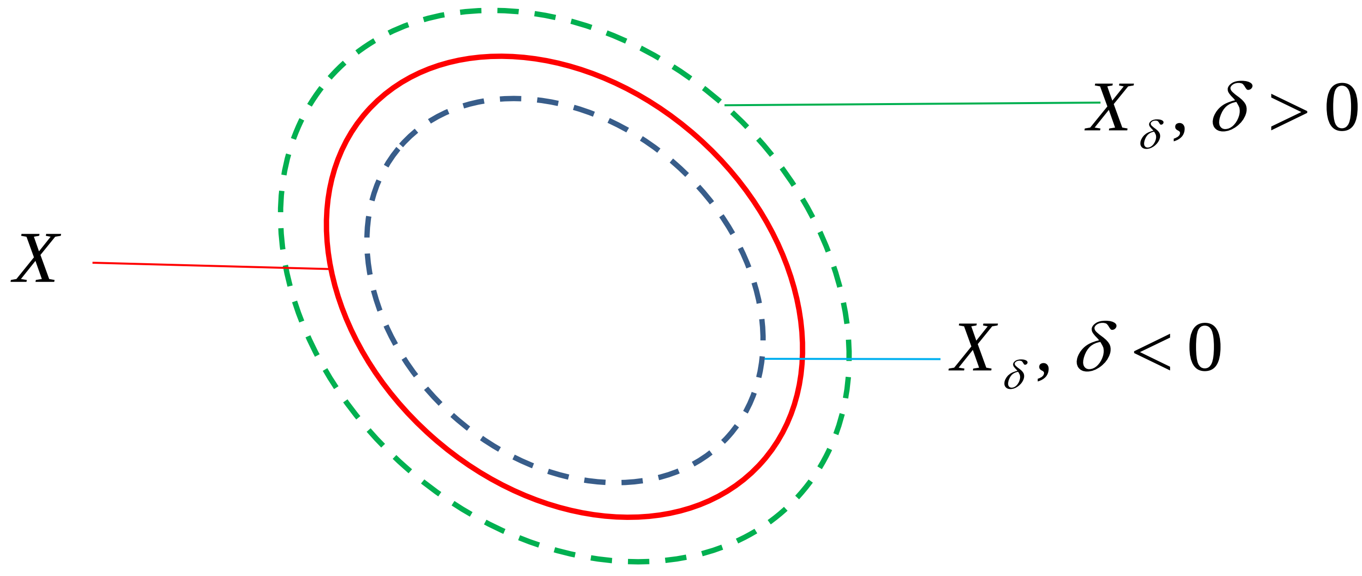
Series		O0	O1	O2	O3	O3+	BR	LG
1	AVR	5.399	0.73	0.49	0.08	0.05	1.07	5.42
	MAX	15.12	1.77	1.15	0.12	0.07	1.36	6.02
	MIN	0.66	0.33	0.11	0.07	0.04	0.65	3.43
2	AVR	T	11.24	8.52	0.54	0.29	4.86	E
	MAX	T	28.92	39.17	0.67	0.38	6.56	E
	MIN	T	4.03	2.09	0.46	0.24	3.68	E
3	AVR	T	T	T	2.2	1.38	A	E
	MAX	T	T	T	2.49	1.75	A	E
	MIN	T	T	T	1.9	1.15	A	E
4	AVR	T	107.31	44.15	0.94	0.54	3.51	23.63
	MAX	T	350.07	120.49	1.46	0.77	3.89	27.71
	MIN	T	22.03	10.49	0.76	0.41	3.02	20.54
5	AVR	T	T	T	11.72	5.85	A	E
	MAX	T	T	T	14.11	7.14	A	E
	MIN	T	T	T	9.93	4.7	A	E

Задачи с функциональными ограничениями

$$X = \left\{ x \in R^n : \varphi(x) \le 0 \right\},\ \varphi(x) = \max(g^1(x), \ldots, g^m(x))$$

$$X^\delta = \left\{ x \in R^n : \varphi(x) \le \delta \right\},$$

$$f_*(\delta) = \min_{x \in X^\delta} f(x) - \textit{функция чувствительности}$$



Основная теорема для НЛП

$$P_1, \dots, P_k, \quad P_i \subseteq P$$

$$S_i \subseteq L(\mu_i(x), P_i, f(x_r) - \varepsilon) \cup L'(\nu_i(x), P_i, \delta_1)$$

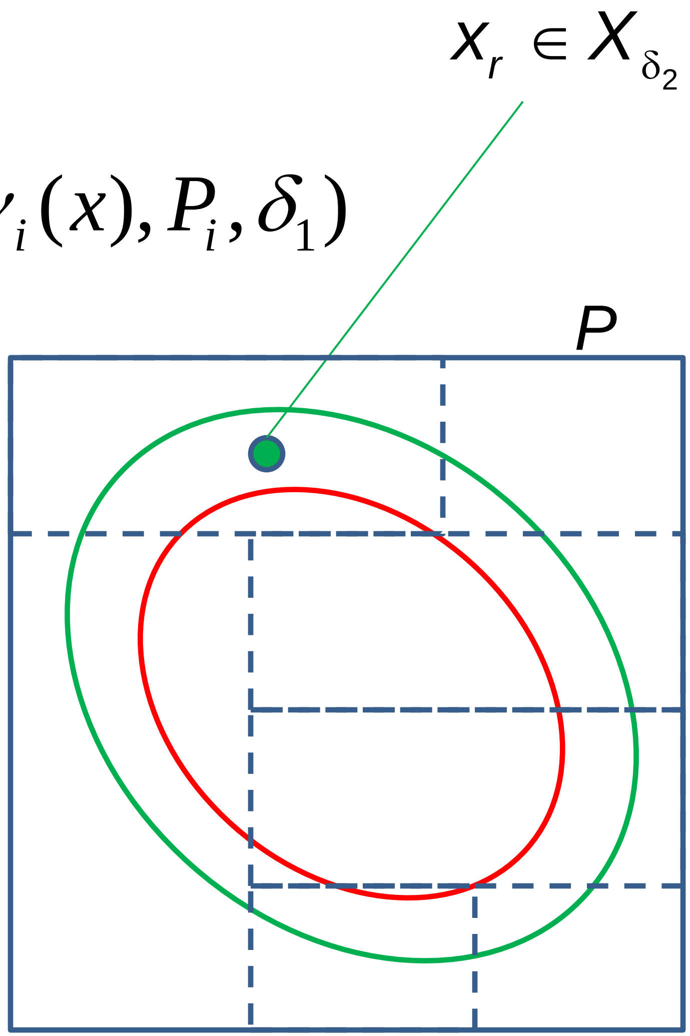
$$f(x) \geq \mu_i(x), \ \varphi(x) \geq \nu_i(x), \ x \in P_i$$

$$\underline{\delta} = \inf \{\delta : X^\delta \neq \varnothing\}, \ \overline{\delta} = \sup \{\delta : X^\delta \subseteq P\}$$

Теорема 1. Если для $\underline{\delta} \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \overline{\delta}$

выполнено $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} S_i,$

то $f_*(\delta_1) + \varepsilon \geq f(x_r) \geq f_*(\delta_2).$



Пример задачи с изолированной точкой

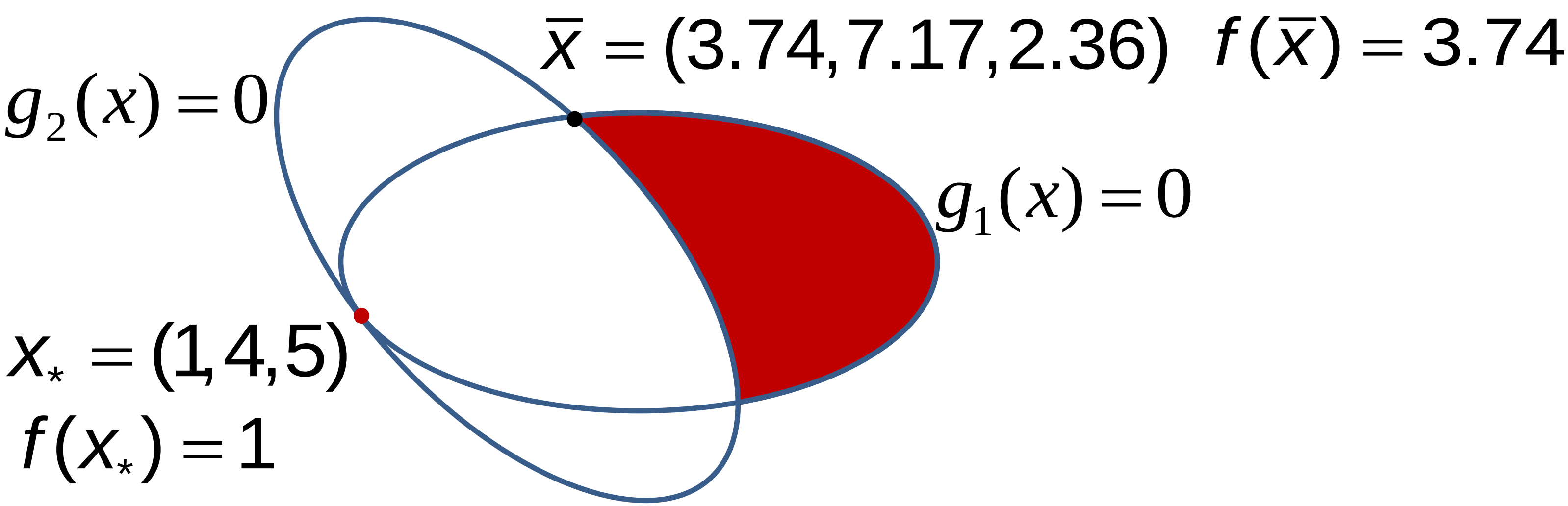
$$f(x) = x^1 \to \min,$$

$$g^1(x) = (x^1 - 5)^2 + 2(x^2 - 5)^2 + (x^3 - 5)^2 - 18 \le 0,$$

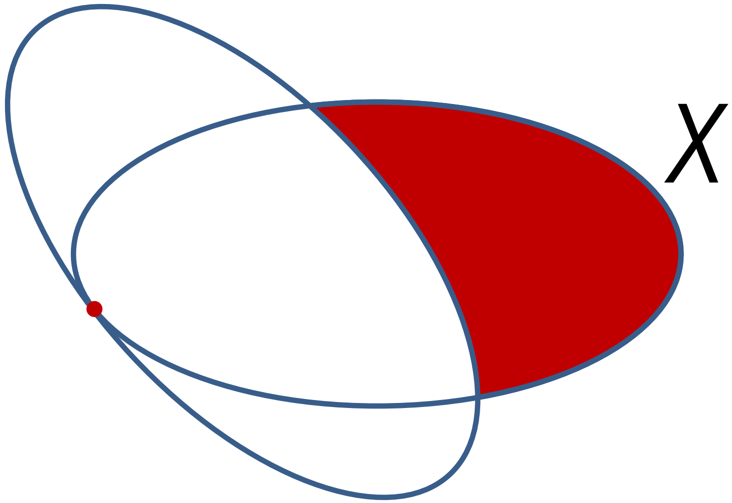
$$g^2(x) = 100 - (x^1 + 7 - 2x^2)^2 -$$

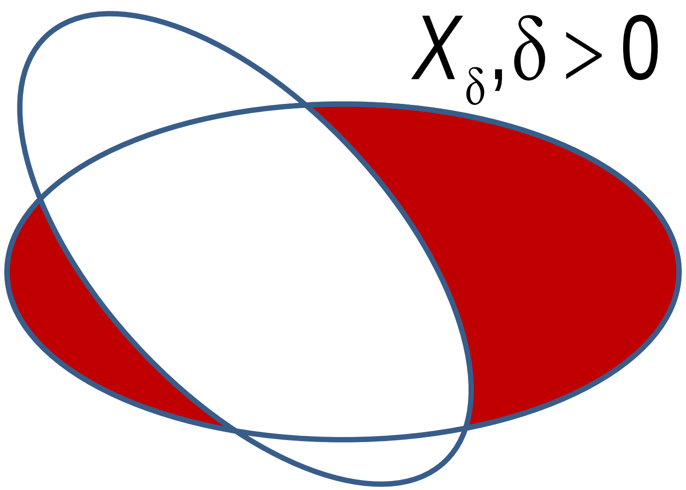
$$4(2x^1 + x^2 - 11)^2 - 5(x^3 - 5)^2 \le 0.$$

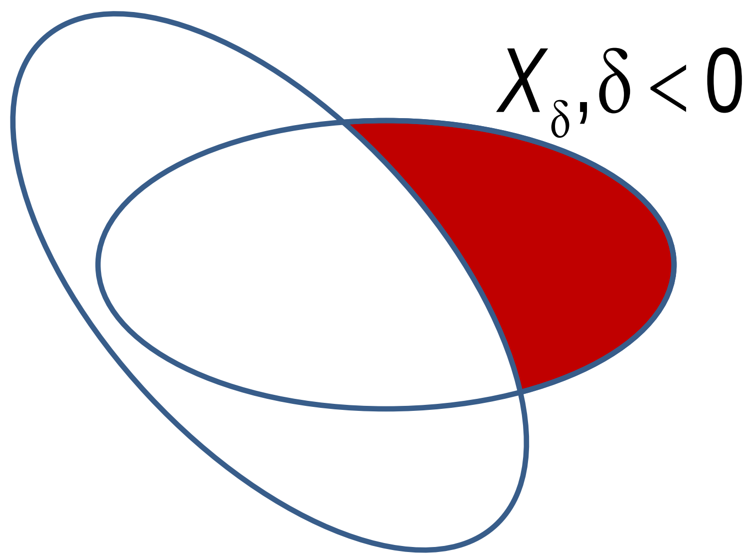
Tuy H.: D(C)-optimization and robust global optimization. J. Glob. Optimization (2010), v. 47, pp. 485-501.



ПРИМЕР ЗАДАЧИ С ИЗОЛИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ







Результаты расчетов при различных δ

$x_* = (1,4,5),\ f(x_*) = 1$ $\qquad$ $\bar{x} = (3.74, 7.17, 2.36),\ f(\bar{x}) = 3.74$

δ	рекорд x_r	$\phi(x_r)$	время расчетов (с)	число итераций
-0.01	$(3.722, 7.276, 7.452)$	-0.00204	0.61	10602
-0.0001	$(3.721, 7.15, 2.331)$	-0.00001	24.57	506351
-0.000001	$(3.720, 7.161, 2.351)$	-0.00000012	2167.16	43355008
0.000001	$(0.999, 4.000, 5.000)$	0.0000005	949.24	18208027
0.0001	$(0.997, 4.007, 4.999)$	0.00007	7.94	165547
0.01	$(0.965, 4.071, 4.994)$	0.00993	0.16	2671

Учет целочисленных в задачах математического программирования

$$f(x) = x^1 \to \min,$$

$$g^1(x) = (x^1 - 5)^2 + 2(x^2 - 5)^2 + (x^3 - 5)^2 - 18 \le 0,$$

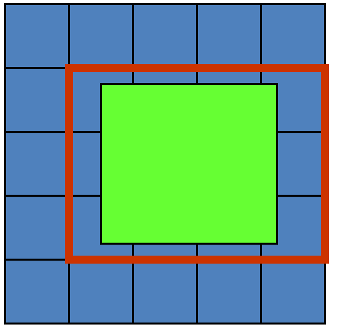
$$g^2(x) = 100 - (x^1 + 7 - 2x^2)^2 -$$

$$4(2x^1 + x^2 - 11)^2 - 5(x^3 - 5)^2 \le 0.$$

$$x \in Z^3$$

$$x_* = (1,4,5)$$

Метод	Число итераций
Липшицева функция	585
Градиент удовлетворяет условию Липшица	121
Градиент + сокращение области поиска	55
Без учета целочисленности $\varepsilon = \delta = 0.01$	2671



Развитие МНП для задач многокритериальной оптимизации

$$F(x) \to \min,$$

$$x \in X \subseteq R^n,$$

$$F(\cdot): R^n \to R^m,$$

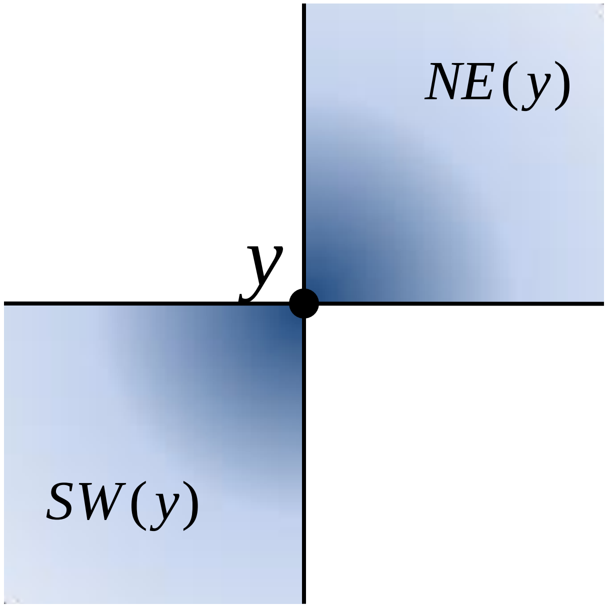
$$F(x) = \left(f^{(1)}(x), \ldots, f^{(m)}(x) \right)$$

Обозначения

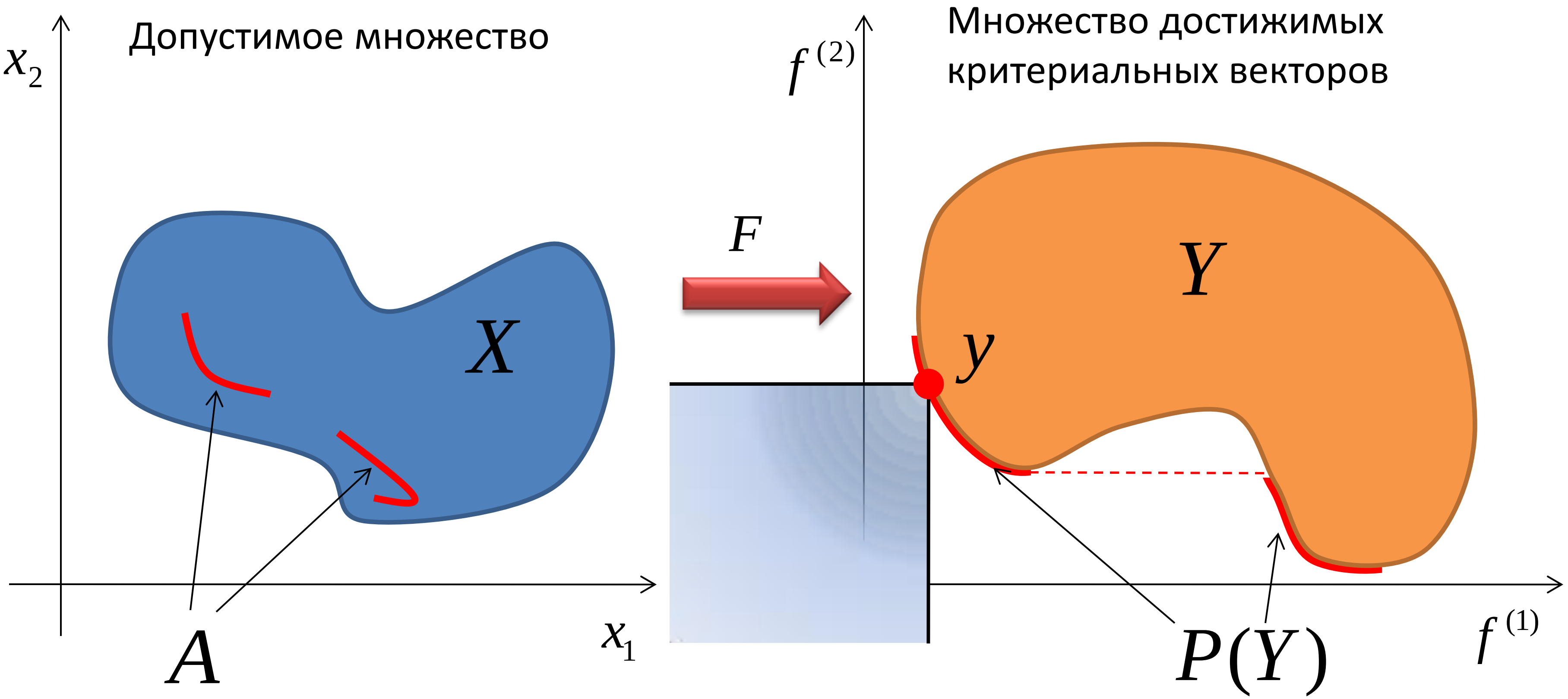
1. $u \le v \Leftrightarrow u_i \le v_i \;\; for\, i = 1,\ldots, m$

2. $SW(y) = \{u \in R^m : u \le y\}$

3. $NE(y) = \{u \in R^m : u \ge y\}$



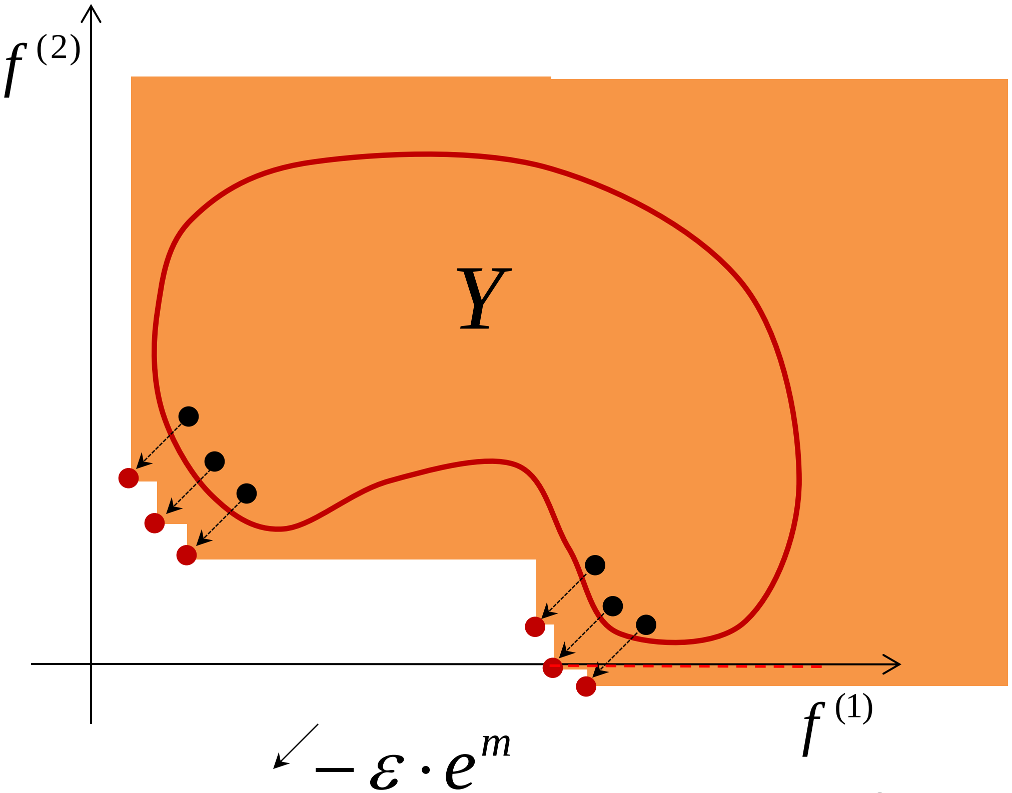
Множество (граница) Парето



$$P(Y) = \{ y \in Y : SW(y) \cap Y = y \}$$

$$F(A) = Y$$

Множество ε-Парето



Y_ε множество $\varepsilon - \textit{Парето}$

если

1. $Y_\varepsilon \subseteq Y$
2. $P(Y_\varepsilon) = Y_\varepsilon$
3. $P(Y) \subseteq NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)$

$$e^m = (\underbrace{1,\ldots,1}_{m})$$

Ю. Г. Евтушенко, М. А. Потапов.
Методы решения многокритериальных задач.
Доклады Академии наук СССР, Т. 291, N 1,
С. 25-39, 1986

Свойства множества ε-Парето

Теорема 2.1 *Справедливы следующие свойства, связывающие оболочки Эджворта-Парето множества ε-Парето и множества достижимых критериев:*

$$NE(Y_\varepsilon) \subseteq NE(Y_*) = NE(Y) \subseteq NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m), \qquad (2.8)$$

$$d_H(NE(Y_\varepsilon), NE(Y)) \leq d_H(NE(Y_\varepsilon), NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)) \leq \varepsilon\sqrt{m}, \qquad (2.9)$$

$$d_H(NE(Y), NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)) \leq d_H(NE(Y_\varepsilon), NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)) \leq \varepsilon\sqrt{m}. \qquad (2.10)$$

Теорема 2.2 *Для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что любое ε-Парето множества Y_ε образует δ-сеть для множества Y_*.*

Теорема 2.2 не устанавливает связь между ϵ и δ. Такую связь можно установить для точек, оптимальных по Джоффриону. Введем обозначение для множества индексов критериев $M = \{1, ..., m\}$. Согласно [65], точка $y_* \in Y$ называется *оптимальной по Джоффриону*, если существует такое положительное число $\theta(y_*)$, что для всех точек $y \in Y$ справедливо следующее: если $y^{(i)} < y_*^{(i)}$, то найдется $j \in M$, такое что $y^{(j)} > y_*^{(j)}$, причем

$$\frac{y_*^{(i)} - y^{(i)}}{y^{(j)} - y_*^{(j)}} \leq \theta(y_*).$$

Утверждение 2.2 *Если точка y_* оптимальна по Джоффриону, то для любого ε-Парето множества Y_ε при $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho(y_*, Y_\varepsilon) \leq \varepsilon\sqrt{m}\max(1, \theta(y_*)).$$

Миноранты и нижние границы

- Для каждого критерия строим миноранту:

$$f^{(j)}(x) \geq \mu_i^{(j)}(x) \quad \text{for} \quad x \in X_i,\ j = 1,..,m$$

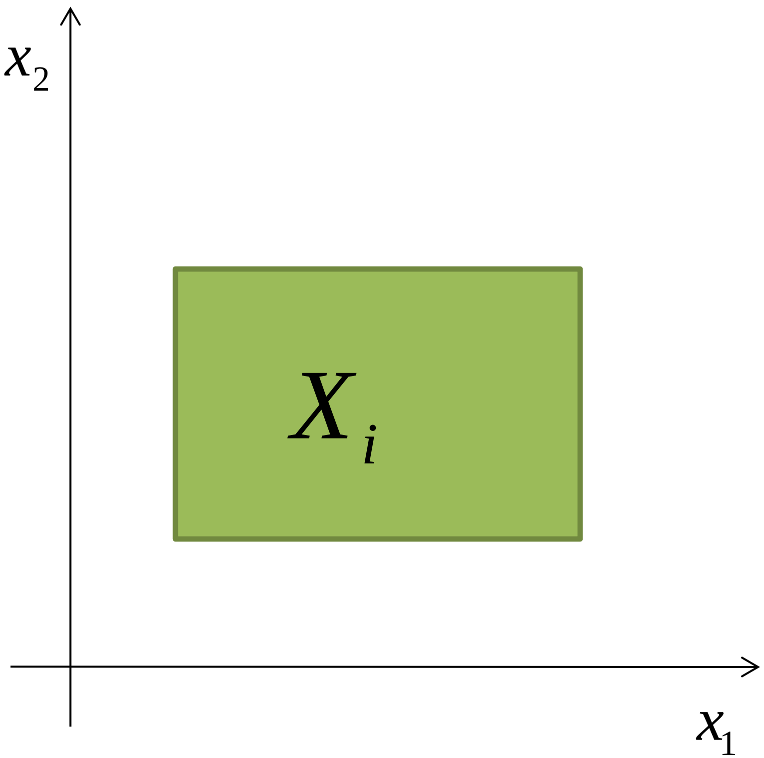
- Нижняя граница – точка $l(X_i)$

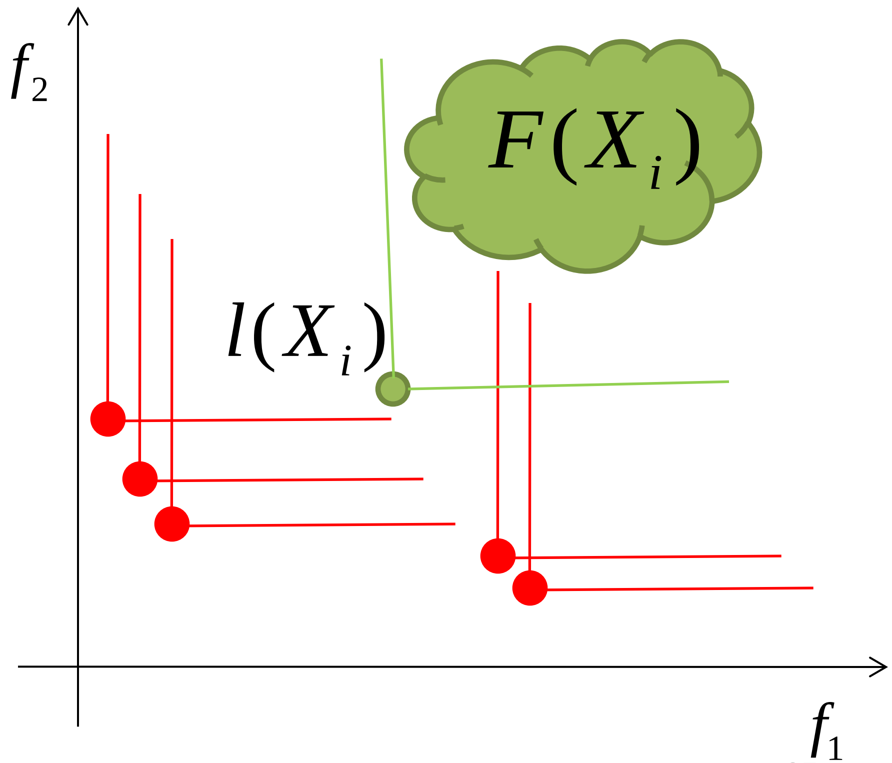
$$l(X_i) = (l^{(1)},...,l^{(m)}) \ \text{ where } l^{(j)} = \min_{x \in X_i} \mu_i^{(j)}(x),\ j = 1,...,m$$

Правила исключения подмножеств

$$l(X_i)\in NE(F(A)-\varepsilon\cdot e_m)\Rightarrow X_i=L(\mu_i(\cdot),X_i,F(A)-\varepsilon\cdot e_m)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_i\ \textit{можно исключить из рассмотрения}$$





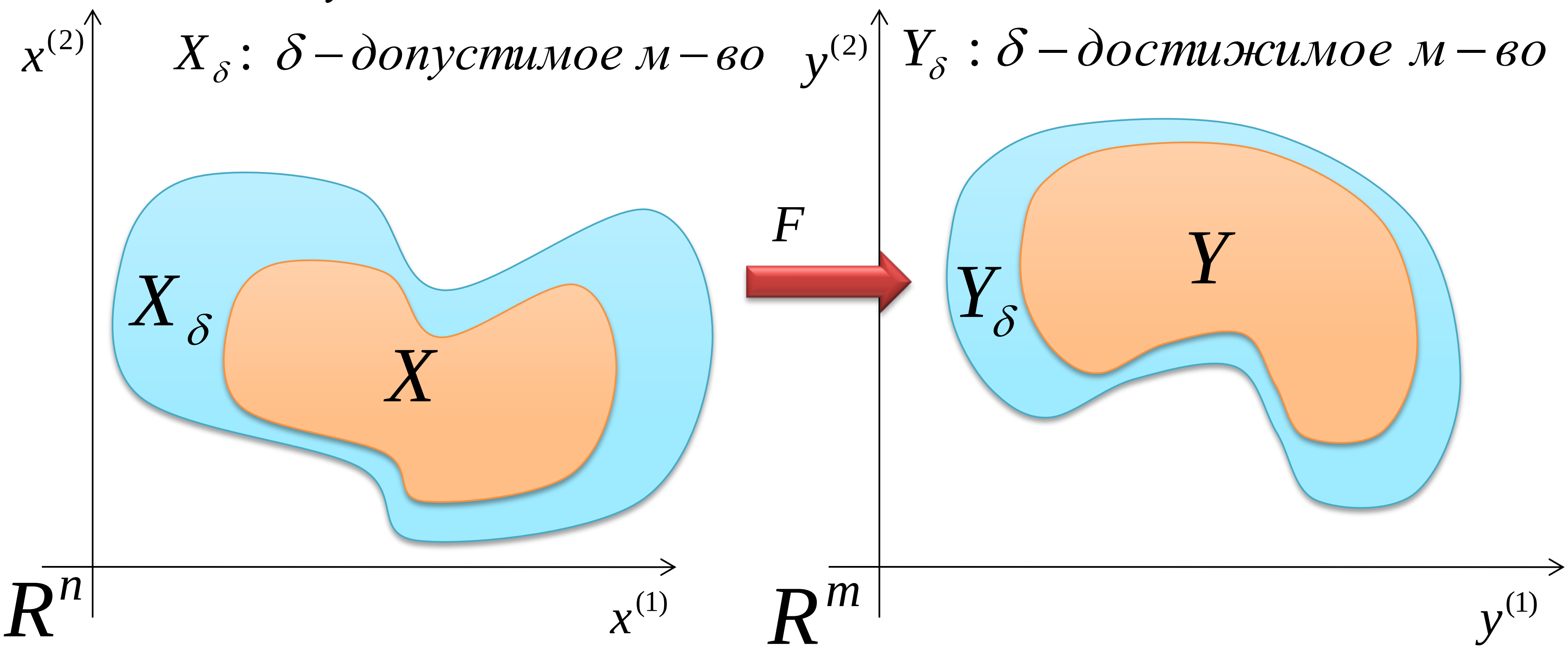
δ-допустимое множество

$X:$ *допустимое м-во*

$X_\delta:$ δ–*допустимое м-во*

$Y:$ *достижимое м-во*

$Y_\delta:$ δ–*достижимое м-во*



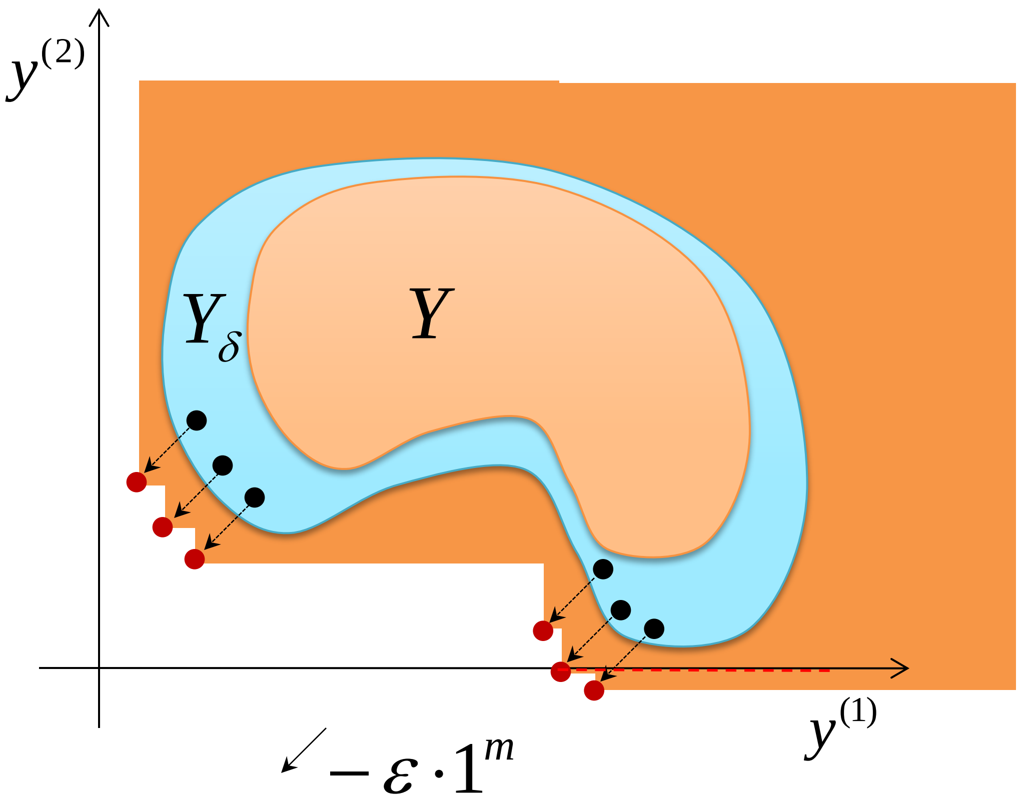
$$X = \left\{x \in R^n : G(x) \le 0\right\}$$

$$X_\delta = \left\{x \in R^n : G(x) \le \delta\right\},\ \delta \ge 0$$

$$Y = F(X)$$

$$Y_\delta = F(X_\delta)$$

Приближенное решение: множество ε,δ-Парето



$Y_{\varepsilon,\delta}$ есть множество

ε,δ – Парето если

1. $Y_{\varepsilon,\delta} \subseteq Y_\delta$

2. $P(Y_{\varepsilon,\delta}) = Y_{\varepsilon,\delta}$

3. $Y \subseteq NE(Y_{\varepsilon,\delta} - \varepsilon\cdot 1^m)$

Правило отсева с учетом подмножеств

- Миноранты для функций ограничений:

$$g^{(i)}(x) \geq \nu^{(i)}(x) \qquad x \in B,\ i = 1,..,k$$

- Нижняя граница $l(B)$:

$$l(B) = (l^{(1)},...,l^{(k)}) \qquad l^{(i)} = \min_{x \in B} \nu^{(i)}(x),\ i = 1,...,k$$

- Правило отсева:

$$l(B) \notin R_{-}^{k} \Rightarrow \text{discard} \quad B$$

Вычислительный эксперимент

$$f^{(1)}(x) = x^{(1)},$$

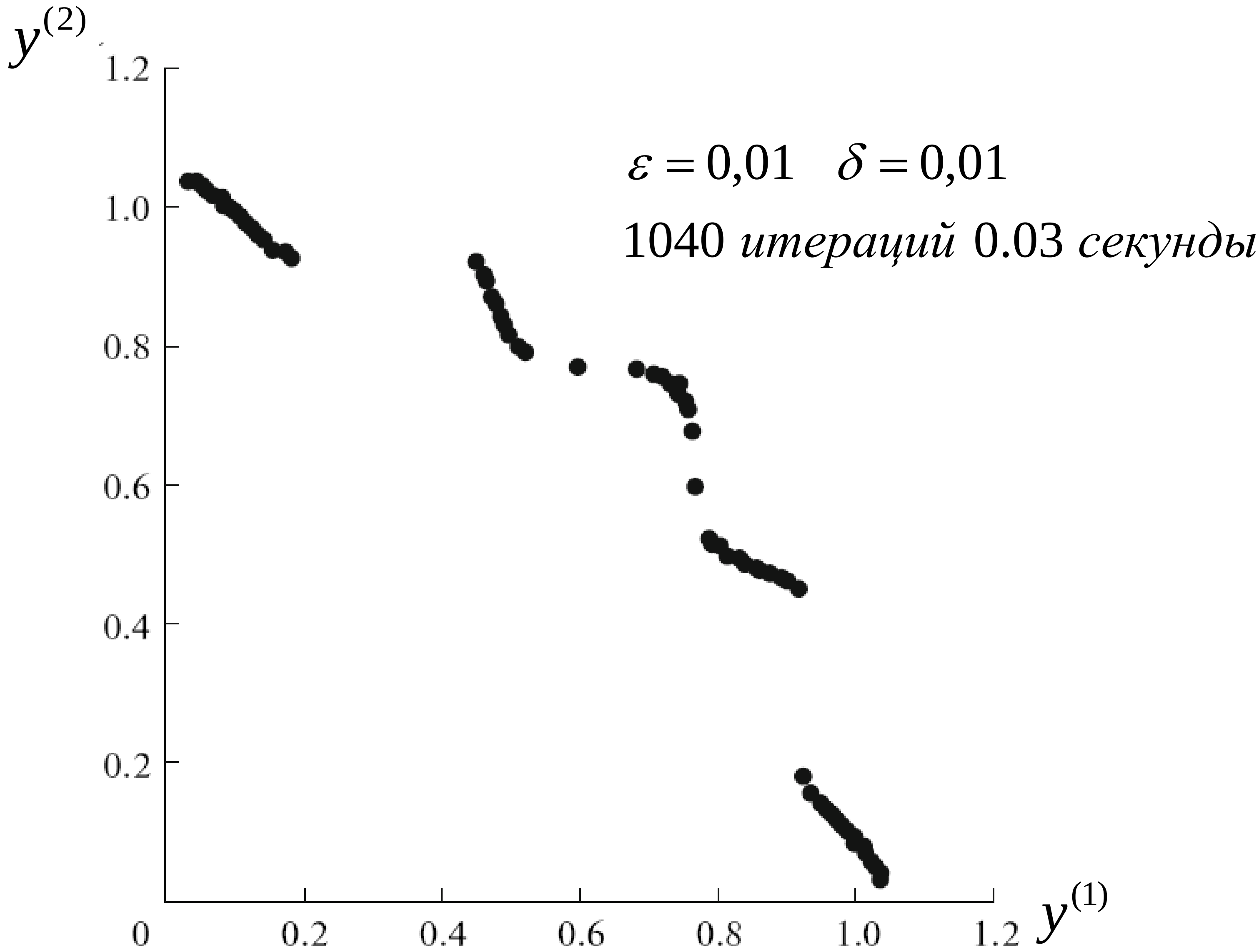
$$f^{(2)}(x) = x^{(2)},$$

$$-(x^{(1)})^2 - (x^{(2)})^2 + 1 + 0.1\cos\left(16\operatorname{arctg}\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}\right) \le 0,$$

$$(x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.5)^2 - 0.5 \le 0.$$

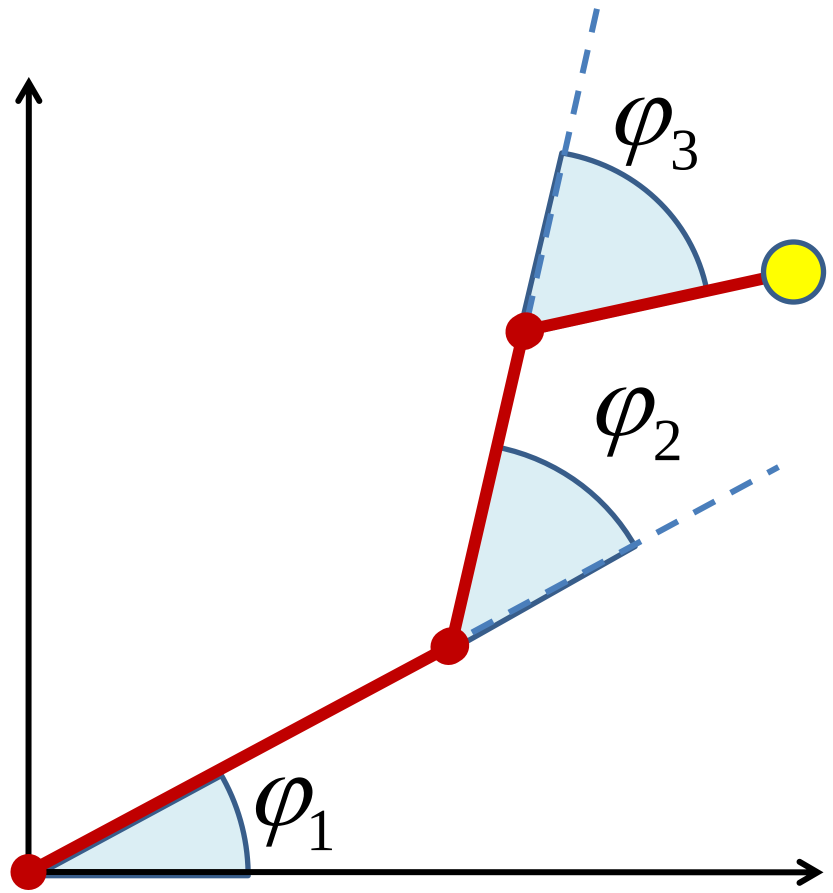
D. Chafekar, J. Xuan, K. Rasheed, Constrained Multiobjective Optimization Using Steady State Genetic Algorithms, In Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference, Chicago, Illinois, pp 813-824, 2003.

Результаты

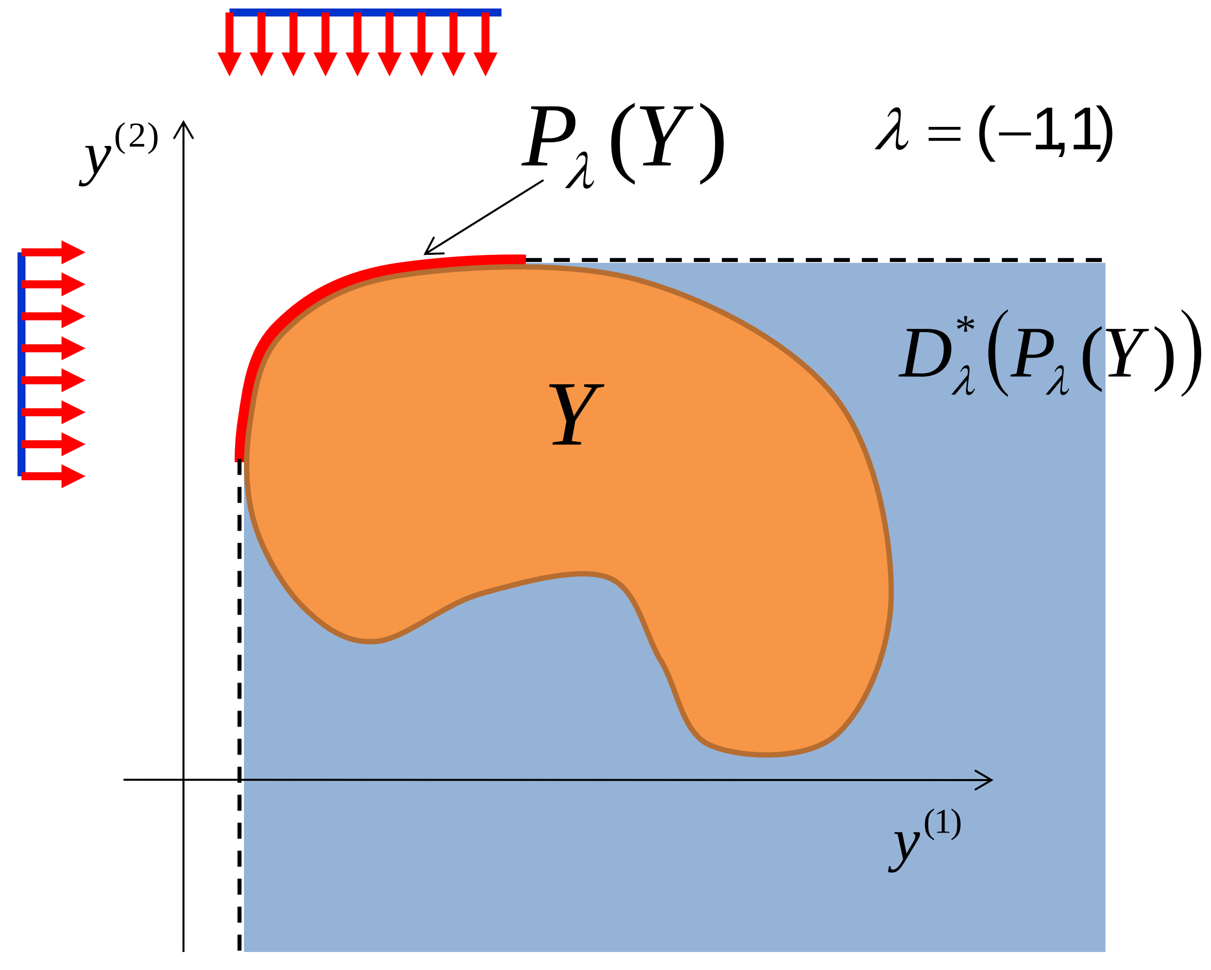


$y^{(2)}$
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
$y^{(1)}$
$\varepsilon = 0{,}01 \quad \delta = 0{,}01$
1040 *итераций* 0.03 *секунды*

Применение методов МКО для построения областей достижимости систем



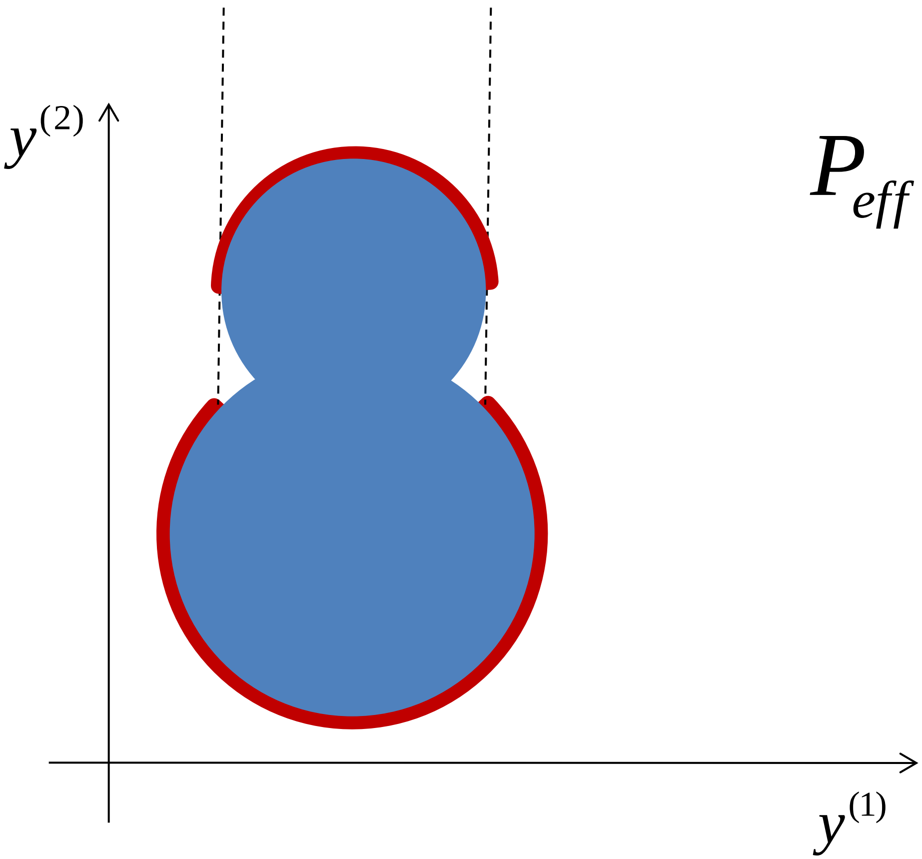
Сочетание максимизации и минимизации критериев



$$f^{(1)}(x) \to \min$$

$$f^{(2)}(x) \to \max$$

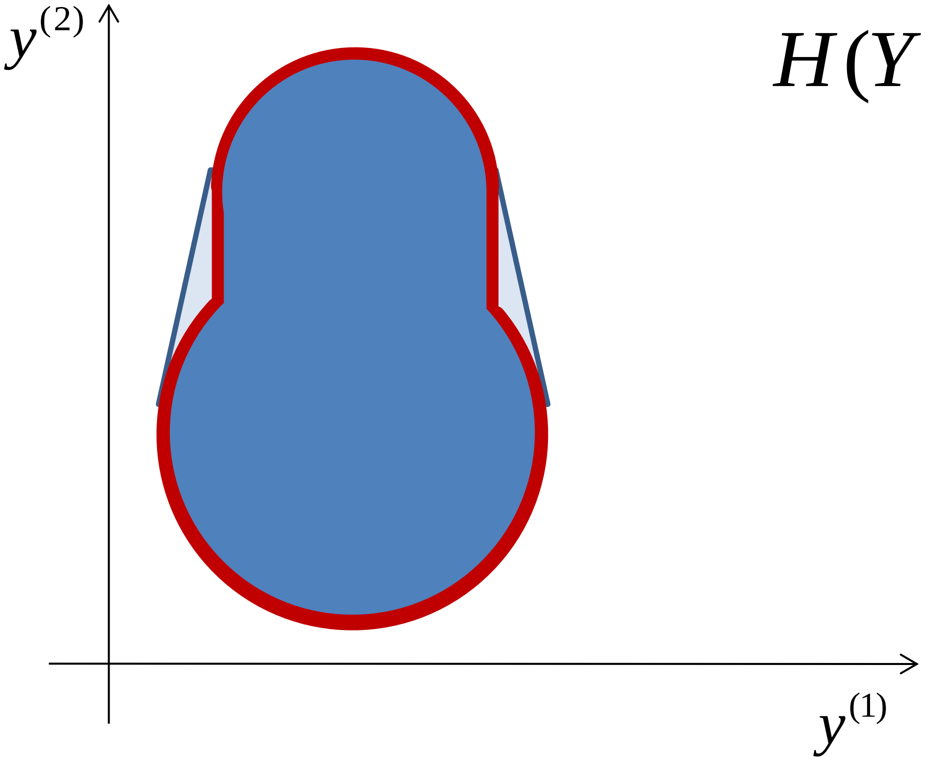
Эффективная граница



$$P_{eff} = \bigcup_{\lambda \in \{-1,1\}^m} P_\lambda(Y)$$

Теорема. Эффективная граница компактного строго-выпуклого множества совпадает с его границей

Эффективная оболочка

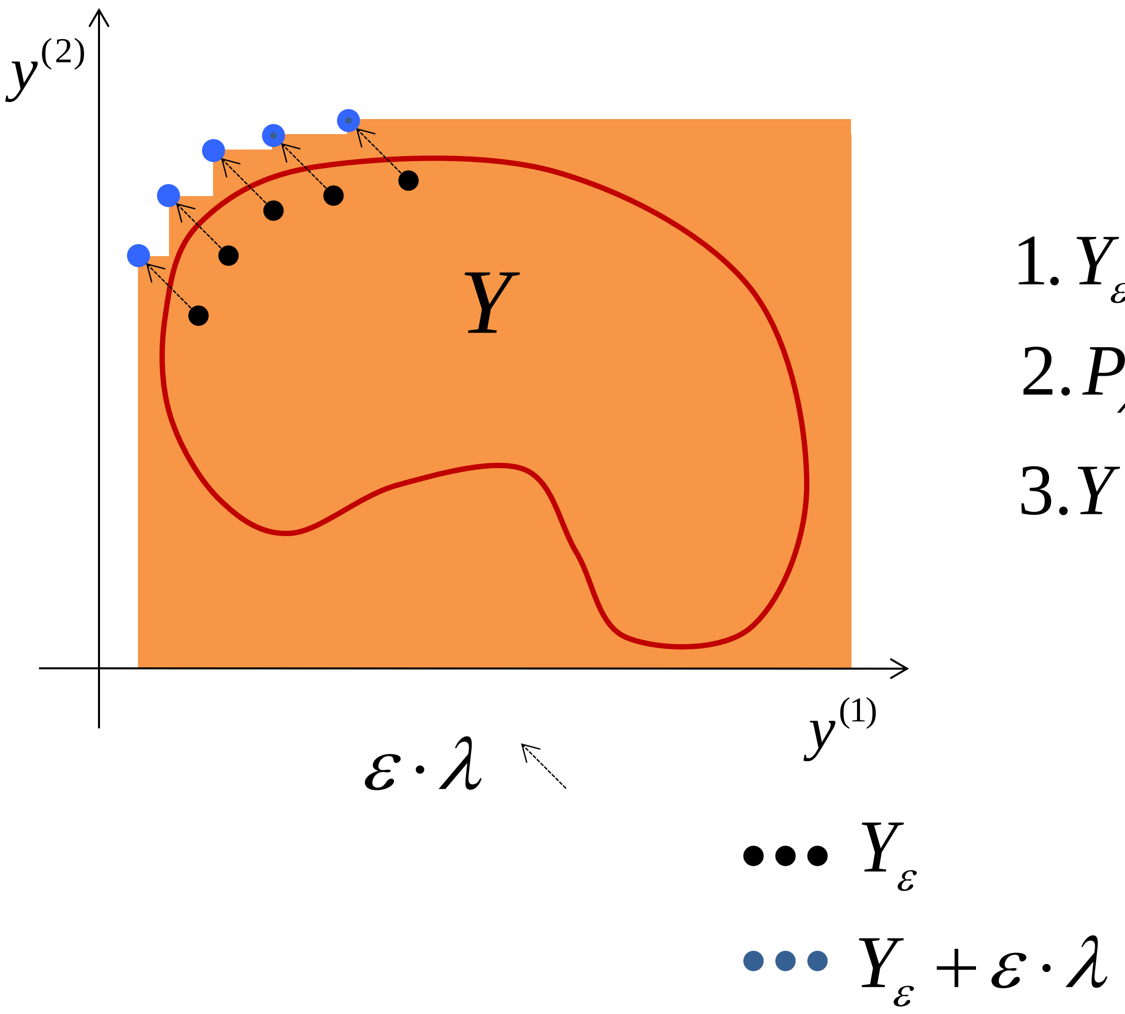


$$H(Y) = \bigcap_{\lambda \in \{-1,1\}^m} D_\lambda^*\left(P_\lambda(Y)\right)$$

Теорема. Эффективная оболочка содержится в выпуклой оболочке множества:

$$Y \subseteq H(Y) \subseteq Conv(Y)$$

Обобщение понятия множества ε-Парето

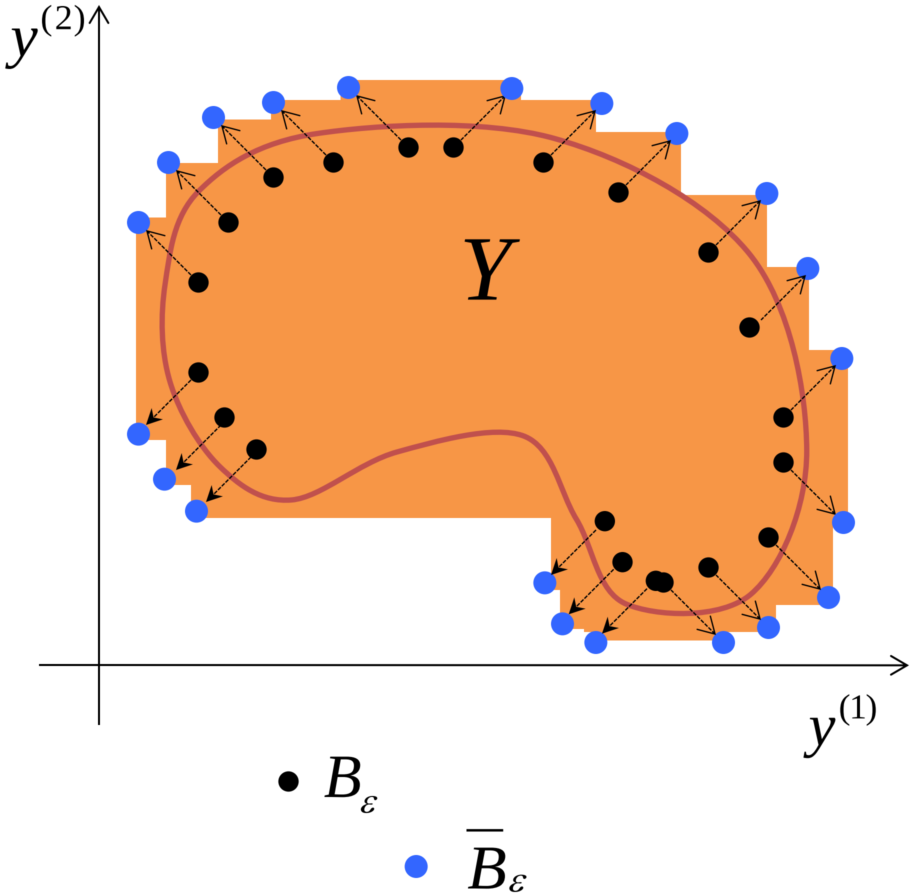


1. $Y_\varepsilon \subseteq Y$
2. $P_\lambda(Y_\varepsilon) = Y_\varepsilon$
3. $Y \subseteq D_\lambda^*\left(Y_\varepsilon + \varepsilon \cdot \lambda\right)$

$f^{(1)}(x) \to \min$

$f^{(2)}(x) \to \max$

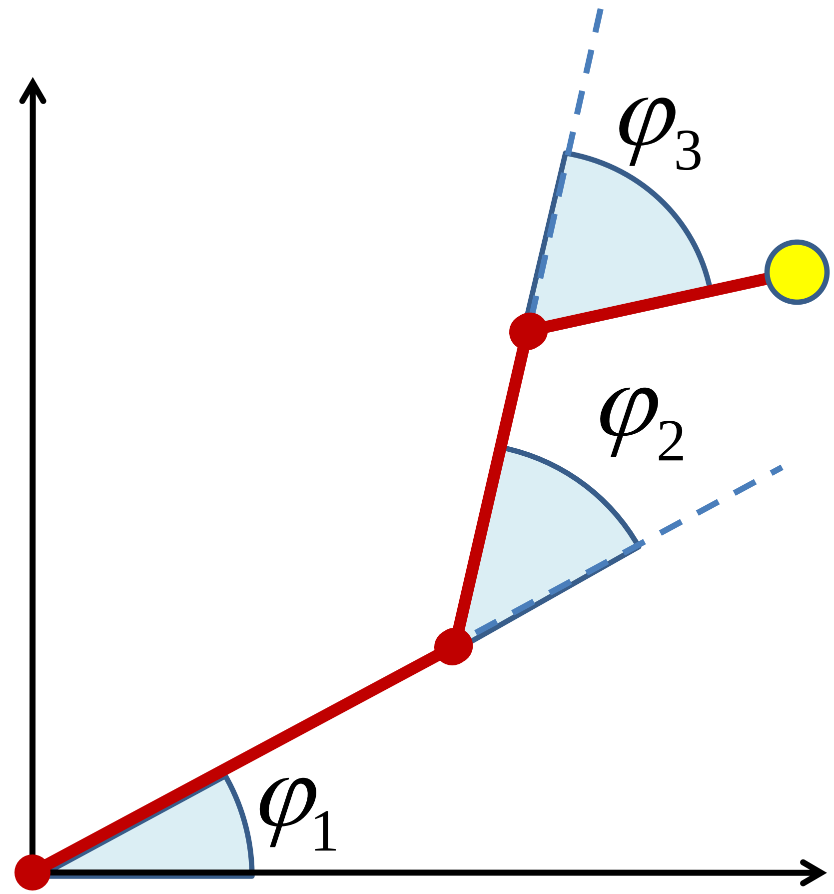
$\mathcal{E}$-эффективная оболочка множества Y



$$H_\varepsilon = \bigcap_{\lambda \in \{-1,1\}^m} D^*_\lambda (Y^\lambda_\varepsilon + \varepsilon \cdot \lambda)$$

$$Y \subseteq H_\varepsilon \subseteq Conv(\overline{B}_\varepsilon)$$

Практический пример: построение области достижимости многосекционного робота-манипулятора



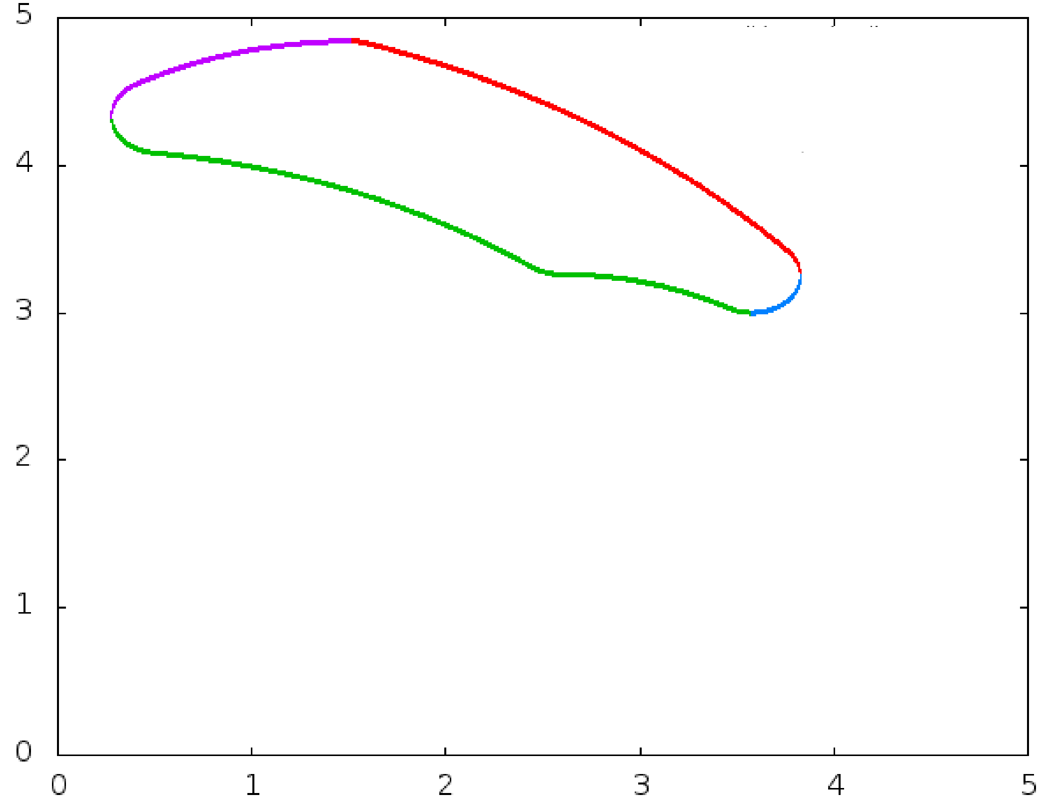
Трехсекционный плоский робот-манипулятор

$$L_1 = 3, L_2 = 2, L_3 = 0.25,$$

$$\frac{\pi}{6} \le \varphi_1 \le \frac{\pi}{3},$$

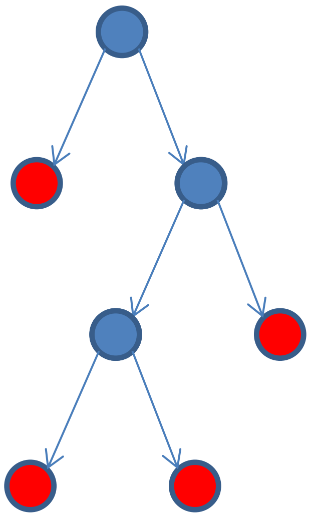
$$\frac{\pi}{6} \le \varphi_2 \le \frac{\pi}{3},$$

$$-\pi \le \varphi_3 \le \pi$$



Вычислительная сложность МВГ

1. Поместить в список подмножеств исходное допустимое множество X
2. Выбрать и удалить из списка некоторое подмножество G.
3. Произвести действия, направленные на вычисление верхних и нижних оценок целевой функции, сокращение и разбиение подмножества G. Полученные новые подмножества (если таковые получены) добавить в список.
4. Если список пуст, то закончить алгоритм, в противном случае перейти к шагу 2.



Сложность метода неравномерных покрытий

Теорема 4.1 *Пусть существует $d_* > 0$ такое, что любой параллелепипед с диаметром, не превосходящим d_*, всегда полностью исключается из рассмотрения на шаге 3 метода ветвей и границ, d — диаметр исходного параллелепипеда. Тогда сложность метода бисекций не превосходит величины*

$$4\left(\frac{d_*}{d}\right)^{\theta(n)} - 1,$$

где $\theta(n) = 2/\log_2\left(1 - \frac{3}{4n}\right)$.

Сложность МВГ для задачи о ранце

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max, \\ s.t.\ \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le C,\ x_i \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Оценки, не зависящие от коэффициентов задачи

1974 г. Финкельштейн Ю.Ю. $S_n^* \geq 2\binom{n+1}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} - 1$ для любого варианта МВГ

1976 г. Гришухин В.П. $S_n^* = 2\binom{n+1}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} - 1$ если переменные для ветвления выбирать в порядке убывания весов

Для МВГ с ветвлением по дробной переменной построена серия примеров со сложностью, асимптотически стремящейся к

$$3\binom{n+1}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} - 1$$

Оценка сложности любого варианта МВГ

Теорема

Сложность решения задачи о ранце любым вариантом МВГ (при любом порядке выбора переменных ветвления и подзадач для разбиения) удовлетворяет неравенствам

$$S \le 2\binom{n+1-s+t}{t}-1, \quad S \le 2\sum_{i=\lfloor n/2\rfloor-\lfloor w_1/w_n\rfloor+1}^{\lfloor n/2\rfloor+\lfloor w_1/w_n\rfloor}\binom{n}{i}-1,$$

где

$$w_1 \ge \ldots \ge w_n,$$

$$t = \min\left\{k \in 1,\ldots,n : \sum_{i=n-k+1}^{n} w_i > C\right\},\ s = \min\left\{k \in 1,\ldots,n : \sum_{i=1}^{k} w_i > C\right\}.$$

Оценка сложности мажоритарного алгоритма

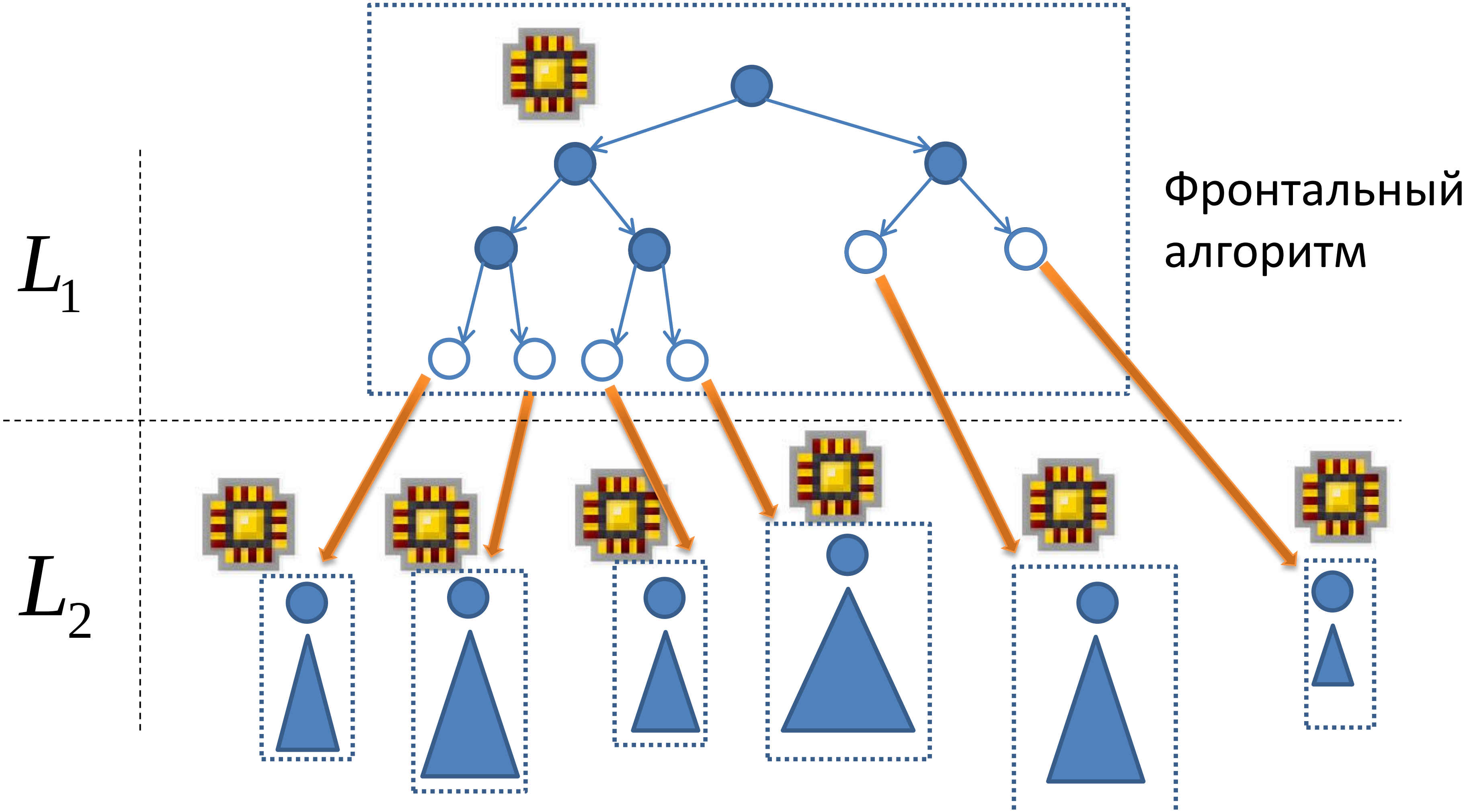
Теорема

Сложность решения задачи о ранце мажоритарным методом ветвей и границ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$S \le 2\binom{n+1}{t} - 1 \quad \textit{при} \quad t \le \lfloor n/2 \rfloor + 1,$$

$$S \le 2\left(\binom{n+1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - \binom{t}{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\right) + 1 \quad \textit{при} \quad t > \lfloor n/2 \rfloor + 1.$$

Сложность параллельного варианта МВГ



Сложность фронтального алгоритма

$$L \geq 2\sqrt{S+2}-3,$$

$$Sp \leq \frac{S}{2\sqrt{S+2}-3} \approx \frac{\sqrt{S}}{2}.$$

$S -$ *сложность последовательного алгоритма*

$L -$ *сложность параллельного фронтального алгоритма*

Сложность ярусного алгоритма для задачи о сумме подмножеств

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} ax_i \to \max, \\ \text{при условиях} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} ax_i \leq ka + 1, \\ x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

Следующая теорема определяет асимптотическое поведение минимальной сложности фронтального алгоритма $L_*(n)$ и значения $s_*(n)$ при котором достигается минимум.

Теорема 5.1 При $n/3 \leq k \leq 2n/3$ справедливы соотношения:

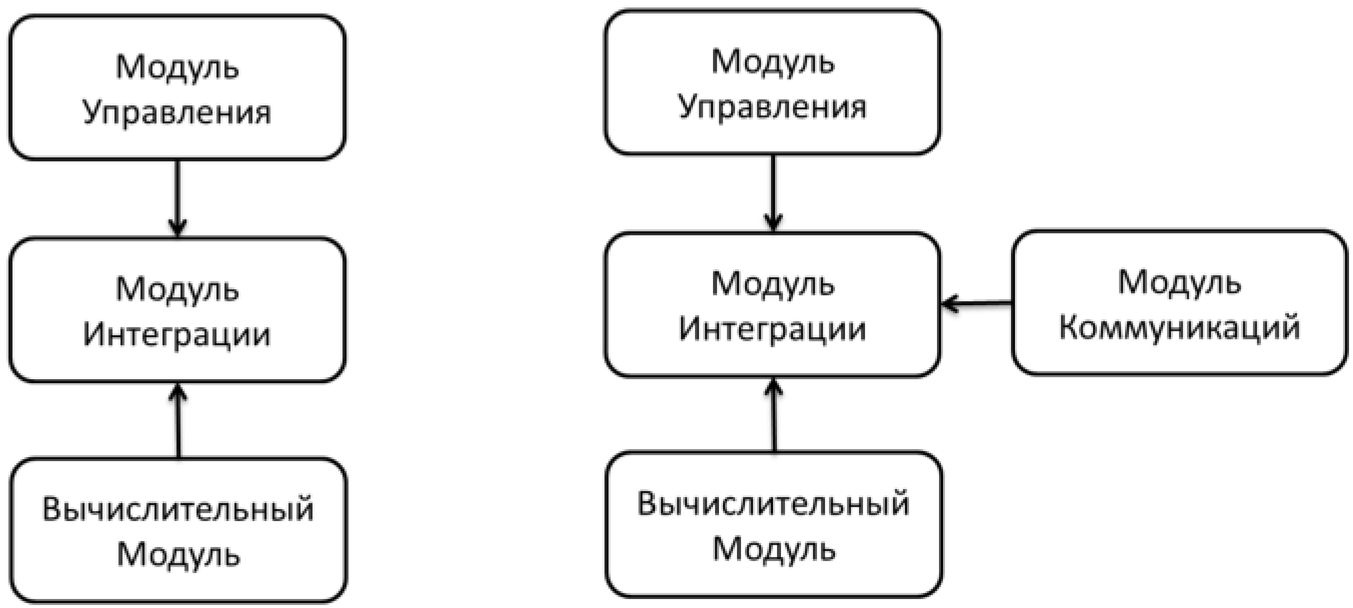
$$L_*(n) \asymp \frac{2^{n/2}}{\sqrt[4]{n}},$$

$$s_*(n) = n/2 - \frac{1}{4}\log_2 n + O(1).$$

Программный комплекс BNB-Solver

1. гибкая поддержка широкого спектра вариантов метода ветвей и границ;
2. высокая производительность на задачах оптимизации большой размерности;
3. модульность и расширяемость, позволяющая минимизировать усилия разработчика при добавлении новой функциональности;
4. переносимость на уровне исходного кода между различными последовательными и параллельными платформами.

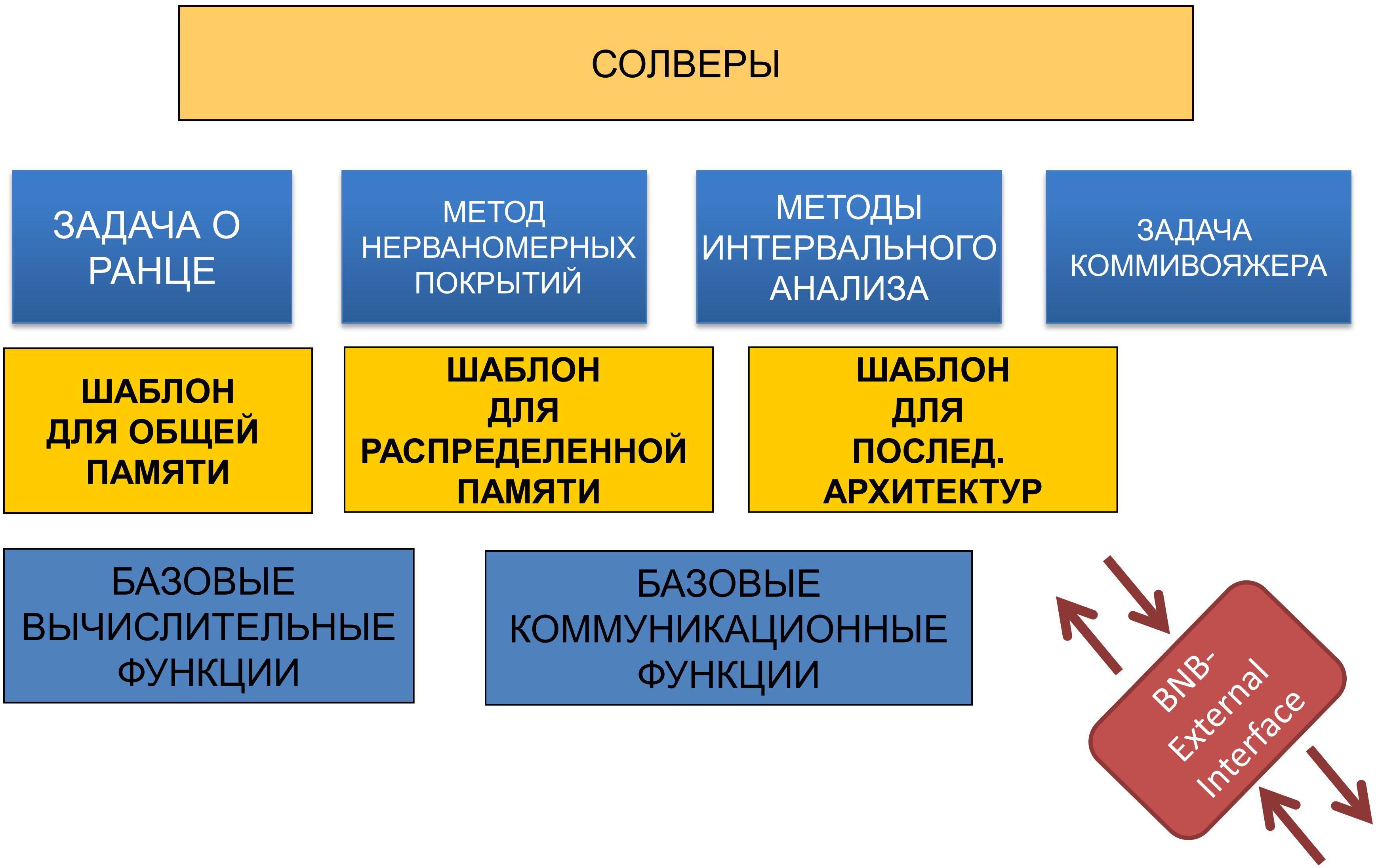
Программный комплекс BNB-Solver



Последовательный вариант

Параллельный вариант

СТРУКТУРА ПАКЕТА BNB-Solver



Параллельная реализация МНП

Обобщенная функция Розенброка

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2) \to \min$$

$$x_i \in [-2.048, 2.048], \ \varepsilon = 10^{-4}, n = 10$$

Суперкомпьютер MVS 100K

Np	Nw	T	I	Imax	Imin	Sent	Sp	Eff	Ub
1	1	22807.04	вычислялось теоретически как T_{64} * 64						
64	63	356.36	1986664443	32571282	29542653	2521605	64,00	1,00	1,10
128	127	172.8	1954196693	15724943	14643951	2472977	131,99	1,03	1,07
256	255	77.34	1724750337	6948198	6377644	2113645	294,89	1,15	1,09
512	511	45.78	1726057733	3610488	3206750	2122105	498,19	0,97	1,13
1024	1023	32.61	1721944502	1817016	1561509	2111378	699,39	0,68	1,16

BNB-Solver: РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

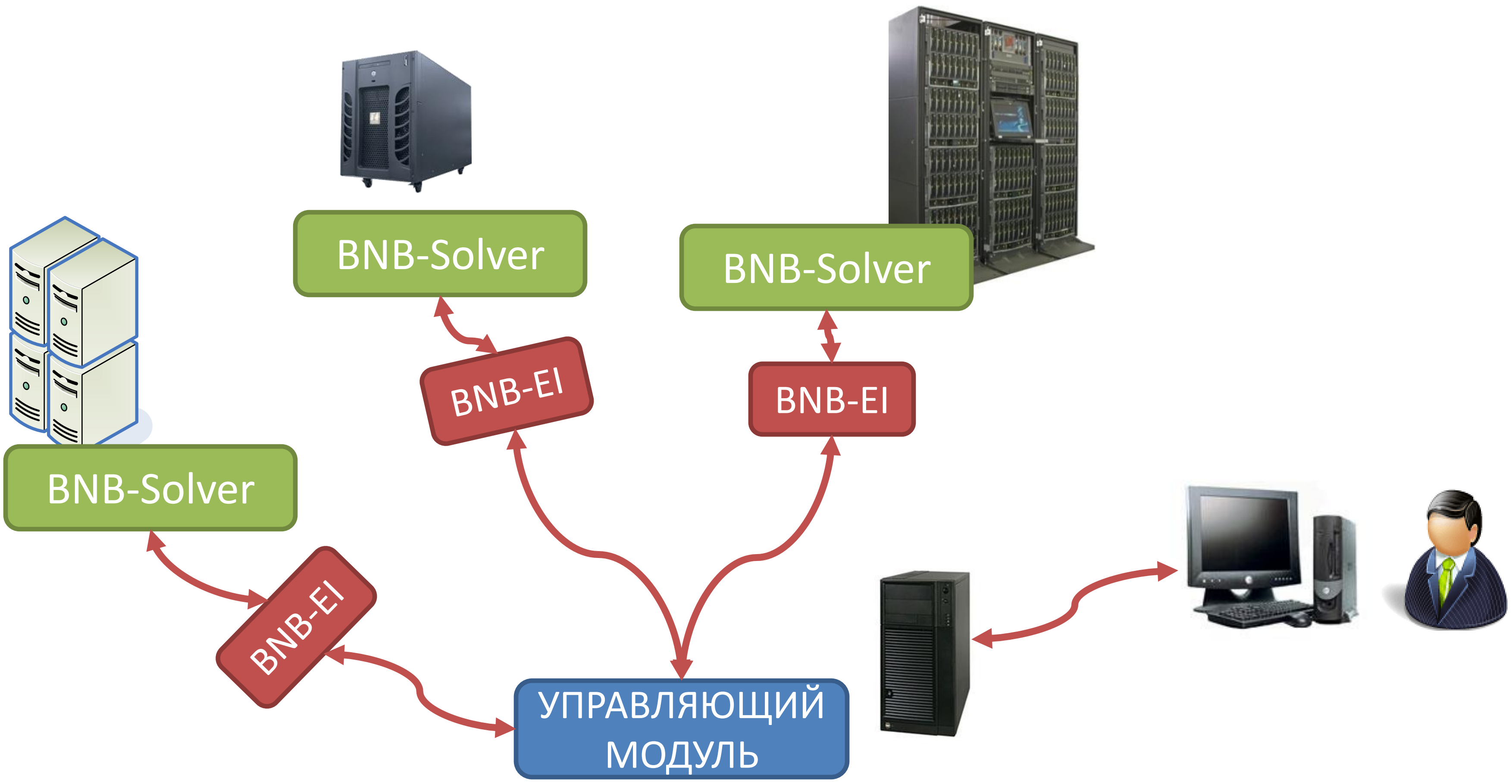
Задача 1 $\sum_{i=1}^{24} x_i \to \max, \sum_{i=1}^{24} 2x_i \le 25$ («пример Финкельштейна»)

Задача 2 Пример из библиотеки PEBBL

Число ядер		1	2	4	8	16	32
Задача 1	ALPS	16.7	19.2	6.57	3.12	2.55	1.85
	PEBBL	137.2	56.3	35.5	23.6	17.1	15.2
	BNB-Solver	1.32	0.69	0.34	0.18	0.11	0.07
Задача 2	ALPS	-	-	-	-	-	-
	PEBBL	743.3	369.5	183.1	99.9	50.2	35.1
	BNB-Solver	3.61	1.86	0.92	0.52	0.50	0.42

ALPS: https://coral.ie.lehigh.edu/trac_projects/alps
PEBBL: http://software.sandia.gov/svn/public/acro/pebbl/

BNB-Grid: Программный комплекс для организации вычислений в распределенной среде



Апробация результатов

- По теме опубликовано более 80 печатных работ
  - Evtushenko Y. G., Posypkin M. A. A deterministic algorithm for global multi-objective optimization //Optimization Methods and Software. Vol. 29,Iss. 5, pp. 1005-1009.
  - Y. Evtushenko, M. Posypkin. A deterministic approach to global box constrained optimization // Optimization Letters, 2013, Volume 7, Issue 4, pp 819-829.
  - М. А. Посыпкин, Метод решения задач условной многокритериальной оптимизации с гарантированной точностью // Доклады академии наук, 2013, том 452, № 4, с. 375–378
  - Р.М. Колпаков, М.А. Посыпкин Верхняя и нижняя оценки трудоемкости метода ветвей и границ для задачи о ранце// Дискретная математика, Т. 22, вып. 1, 2010, С. 58-73
- Результаты докладывались на более чем 40 конференциях

Положения, выносимые на защиту

1. Получены новые миноранты и нижние оценки для минимизации скалярных функций. Предложены новые миноранты, основанные на оценке спектра матрицы Гессе, разработан метод вычисления таких оценок. Для задач оптимизации с параллелепипедными ограничениями предложены новые миноранты, учитывающие необходимые условия оптимальности.
2. В методе неравномерных покрытий предложены способы сокращения области поиска, основанные на построении дополнения покрывающего множества до параллелепипеда, позволяющие существенно повысить быстродействие метода.
3. Метод неравномерных покрытий перенесен на задачи частично-целочисленного программирования, доказана корректность алгоритма.

4. Для задачи многокритериальной оптимизации с параллелепипедными ограничениями доказаны новые свойства ε-Парето множества, устанавливающие связь между этим множеством, границей Парето и оболочкой Эджворта-Парето.

5. Метод неравномерных покрытий для задач многокритериальной оптимизации обобщен на случай произвольных минорант, доказана сходимость метода.

6. Для задач многокритериальной оптимизации с функциональными ограничениями введено новое понятие приближенного решения — множество ε, δ-Парето и предложен алгоритм для его построения,

7. На основе идей многокритериальной оптимизации введено понятие эффективной оболочки множества, показано, что эта оболочка содержится в его выпуклой оболочке. Введены понятия ε-эффективной границы и ε-оболочки множества, предложены методы их численного построения. Разработанные понятия и методы применены для задачи построения внешней границы рабочей области многосекционного робота-манипулятора с заданной точностью.

8. Разработан подход к оценке сложности метода неравномерных покрытий, с помощью которого получены верхние оценки сложности различных вариантов этого метода для различных классов задач.

9. Получены оценки сложности метода ветвей и границ для задачи о булевом ранце. Проведено экспериментальное исследование и сопоставление их точности.

10. Исследован вопрос параллельной вычислительной сложности одной из возможных реализаций метода ветвей и границ. Получена общая оценка вычислительной сложности, не зависящая от конкретной задачи. Для задачи о сумме подмножеств получены асимптотические формулы для минимальной параллельной сложности, максимального параллельного ускорения и эффективности.

11. Предложен подход к реализации детерминированных и гибридных методов глобальной оптимизации на многопроцессорных вычислительных комплексах, основанный на разделении вычислительной, коммуникационной и управляющей функциональности в программе. Разработан язык описания управления параллельным процессом поиска глобального экстремума, основанный на формализме конечных автоматов. Этот язык позволяет описывать как управление процессом оптимизации, так и балансировку вычислительной нагрузки между процессорами параллельной системы. Такой подход позволяет независимым образом реализовывать и отлаживать соответствующие компоненты, а также, облегчать процесс расширения программного комплекса за счет повторного использования ранее разработанных компонент.

12. На основе разработанного подхода реализован программный комплекс для решения задач глобальной оптимизации на последовательных, параллельных и распределенных системах. В рамках этого программного комплекса были реализованы различные алгоритмы для решения задач конечномерной оптимизации с одним и несколькими критериями, проведены многочисленные эксперименты на различных вычислительных платформах. В частности, разработана и выполнена эффективная параллельная реализация метода ветвей и границ для задачи о булевом ранце с одним ограничением, превосходящая по скорости работы известные аналоги.

Спасибо за внимание!

Благодарности

В заключении автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному консультанту академику РАН **Ю.Г. Евтушенко**, профессору **И.Х. Сигалу**, профессору **А.П. Афанасьев**, профессору **Р.М. Колпакову**, профессорам **А.В. Лотову, А.П. Карпенко, А.А. Лазареву, Я.Д. Сергееву** сотруднику ВЦ РАН **А.И. Голикову**, сотрудникам ИДСТУ РАН **Семенову А.А., Заикину О.С.** и другим коллегам по работе за поддержку и полезные советы в процессе работы над диссертацией.

Рассматриваемые методы

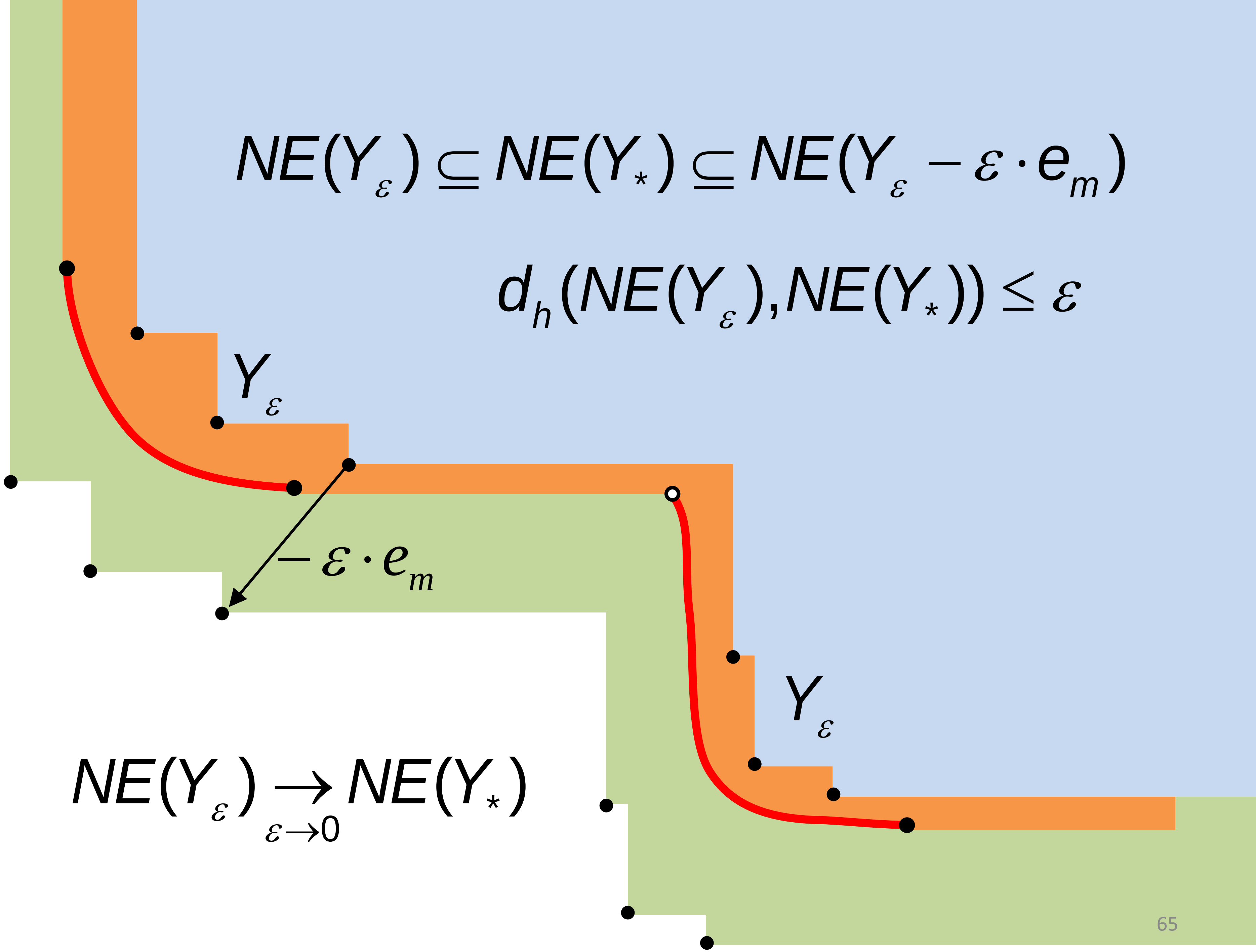
- Метод неравномерных покрытий для задач математического программирования
- Метод неравномерных покрытий для задач многокритериальной оптимизации
- Метод ветвей и границ для задачи о булевом ранце

Метод неравномерных покрытий

- Предложен Ю.Г. Евтушенко в 1971 году для задач безусловной оптимизации
- Вариант для задач математического программирования предложен Евтушенко Ю.Г., Потаповым М.А., Ратькиным В.А. в 1987
- Вариант для многокритериальных задач предложен Евтушенко Ю.Г., Потаповым М.А. в 1986 г.

$$NE(Y_\varepsilon) \subseteq NE(Y_*) \subseteq NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)$$

$$d_h(NE(Y_\varepsilon), NE(Y_*)) \leq \varepsilon$$



$$NE(Y_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} NE(Y_*)$$