

Квантовый причинный анализ и асимметрия квантового дискорда

Киктенко Е.О.

МГТУ им. Н.Э. Баумана



*Центр геоэлектромагнитных
исследований ИФЗ им.
О.Ю. Шмидта РАН*



Краткое содержание доклада

Часть I. «Классическая»

- Основы классической теории информации
- Классический причинный анализ

Часть II. «Квантовая»

- Основы квантовой теории информации
- Квантовый дискорд
- Квантовый причинный анализ

Часть III. Частицы со спином $\frac{1}{2}$ в неоднородном магнитном поле

- Описание модели
- Результаты

ЧАСТЬ I.
«Классическая»

Энтропия Шеннона

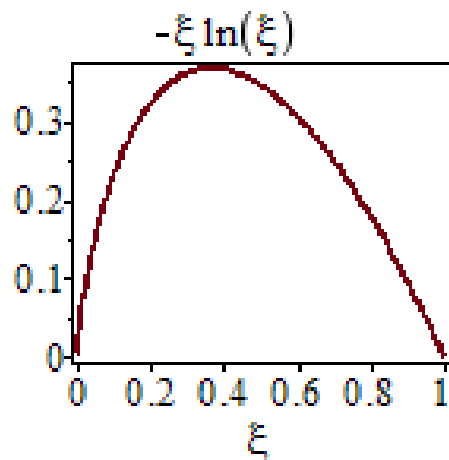
X – дискретная случайная величина, принимающая значения

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

с вероятностями

$$\{p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)\}$$

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i)$$



$\log_2 \rightarrow$ бит

$\log_3 \rightarrow$ трит

$\ln \rightarrow$ нат

$\lg \rightarrow$ дит

1 бит = $\ln 2 \approx 0,693$ нат

1 трит = $\ln 3 \approx 1,099$ нат

1 дит = $\ln 10 \approx 2,303$ нат

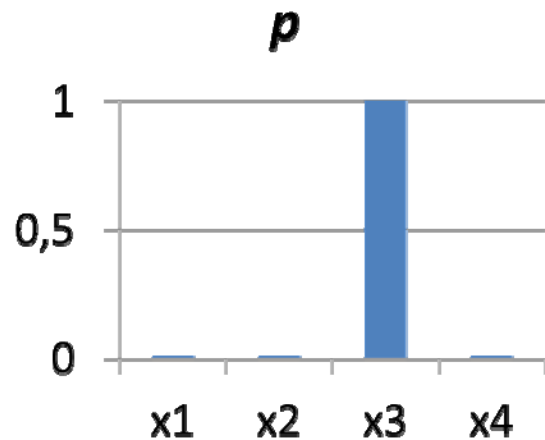
Минимальные и максимальные значения энтропии Шеннона

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i)$$

MIN

$$p(x_k) = 1$$

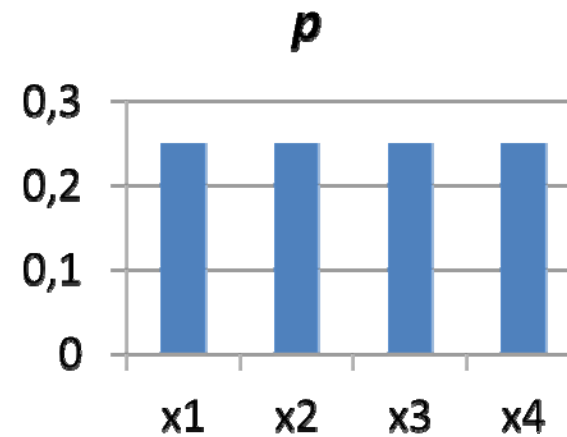
$$p(x_i) = 0, i \neq k$$



$$H(X) = 0$$

MAX

$$p(x_i) = 1/n$$



$$H(X) = \log n$$

Условные энтропии Шеннона

X

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Y

$\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

$p(x_i, y_j)$



$p(x_i) \quad p(y_j) \quad p(x_i | y_j) \quad p(y_j | x_i)$

$$H(\underline{Y} | \underline{X}) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \left\{ \sum_{j=1}^m p(\underline{y_j} | \underline{x_i}) \log p(\underline{y_j} | \underline{x_i}) \right\}$$

$$H(X | Y) = - \sum_{j=1}^m p(y_j) \left\{ \sum_{i=1}^n p(x_i | y_j) \log p(x_i | y_j) \right\}$$

Условные энтропии через безусловные

X

Y

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$

$p(x_i, y_j)$

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

$$H(X | Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

$$H(Y | X) = H(X, Y) - H(X)$$

Для независимых X и Y : $p(x_i, y_j) = p(x_i) p(y_j)$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y), \quad H(X | Y) = H(X), \quad H(Y | X) = H(Y)$$

Классическая взаимная информация

X

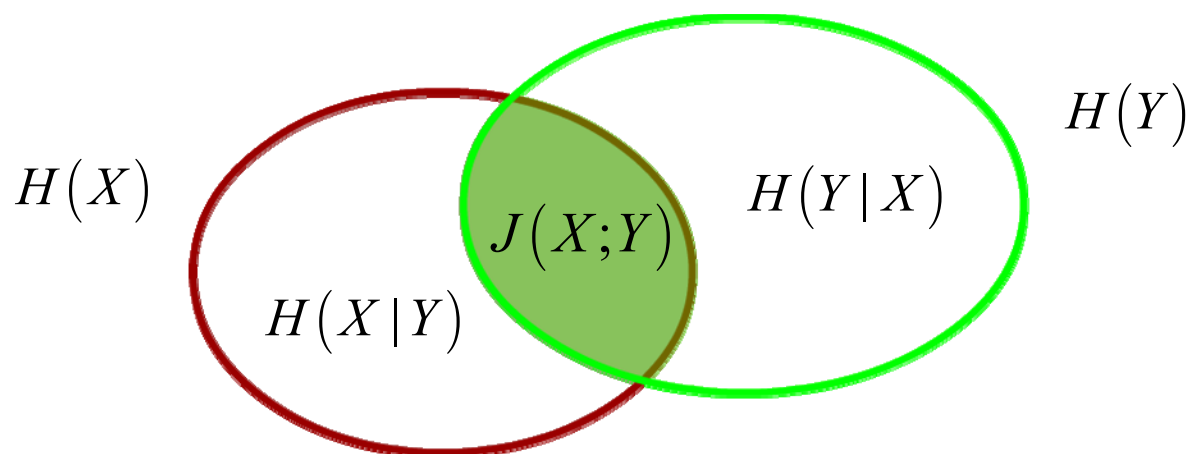
Y

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$p(x_i, y_j)$

$$\begin{aligned} J(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) = J(Y;X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) \end{aligned}$$



$$\max(H(X), H(Y)) \leq H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$$

Классическая взаимная информация и относительная энтропия

$$p_1 = \{p_1(a_1), p_1(a_2), \dots, p_1(a_n)\}$$

$$p_2 = \{p_2(a_1), p_2(a_2), \dots, p_2(a_n)\}$$

$$H(p_1 \parallel p_2) = \sum_{i=1}^n p_1(a_i) \log \frac{p_1(a_i)}{p_2(a_i)} \geq 0$$

$$H(p_1 \parallel p_2) = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$$

$$J(X; Y) = H(p_{XY} \parallel p_X \cdot p_Y)$$

$$J(X; Y) = 0 \Leftrightarrow p_{XY} = p_X \cdot p_Y$$

Максимальный уровень корреляций между двумя однобитными переменными

X \ Y	"0"	"1"
"a"	0	$\frac{1}{2}$
"b"	$\frac{1}{2}$	0

$$H(X) = 1$$

$$H(Y) = 1$$

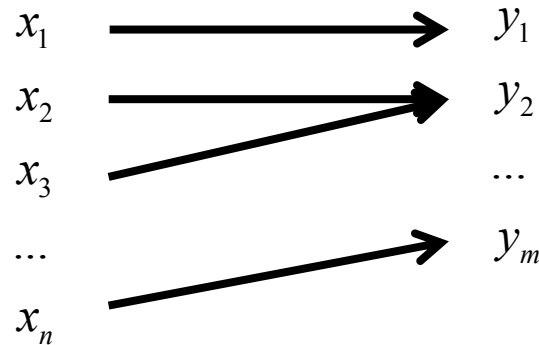
$$H(XY) = 1$$

$$J(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY) = 1$$

Энтропийное неравенство детерминированной обработки информации

$$Y = f(X)$$

$$H(X|Y) \geq 0$$

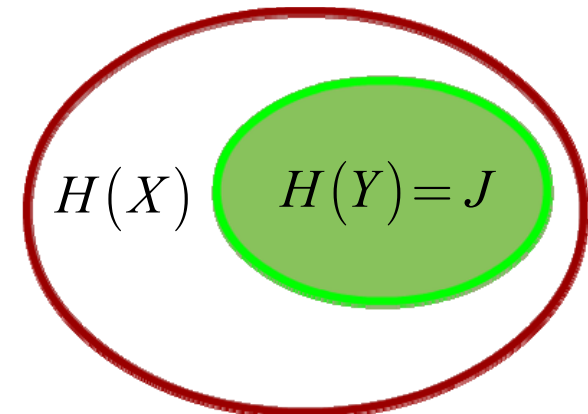


$$H(Y|X) = 0$$

$$n \geq m$$

$$J = H(Y) = H(X) - H(X|Y)$$

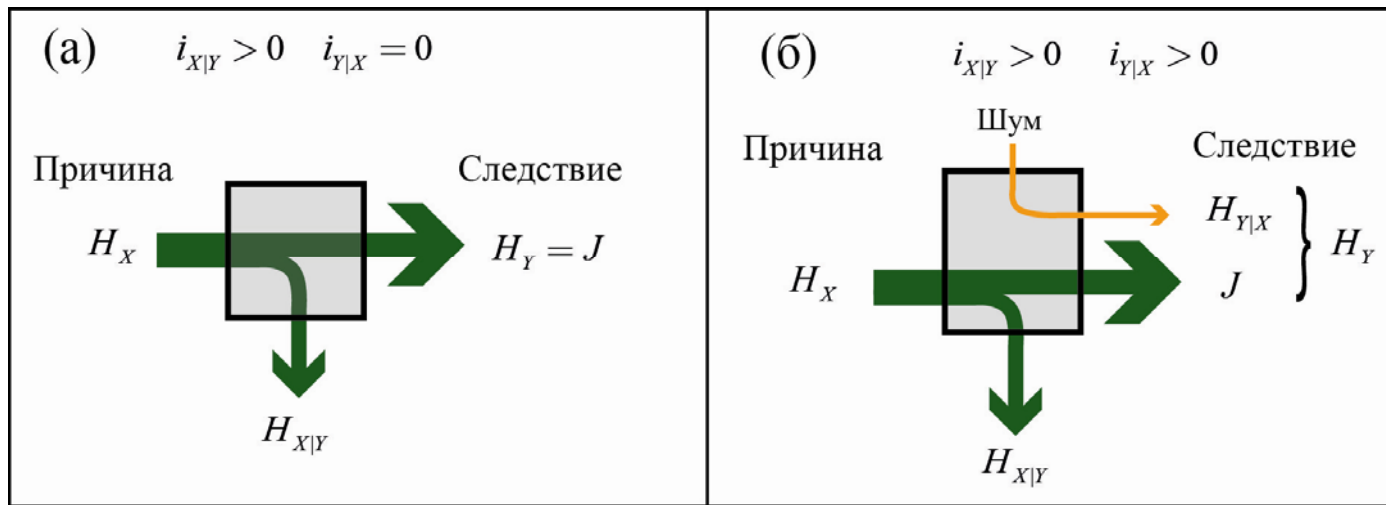
$$H(Y) \leq H(X)$$



Классический причинный анализ*

$$\left. \begin{aligned} i_{X|Y} &= \frac{H(X|Y)}{H(X)} \\ i_{Y|X} &= \frac{H(Y|X)}{H(Y)} \end{aligned} \right\} \text{функции независимости}$$

$$0 \leq i_{\bullet\bullet} \leq 1$$



Формальное определение причинности (X – причина, Y – следствие): $i_{X|Y} > i_{Y|X}$

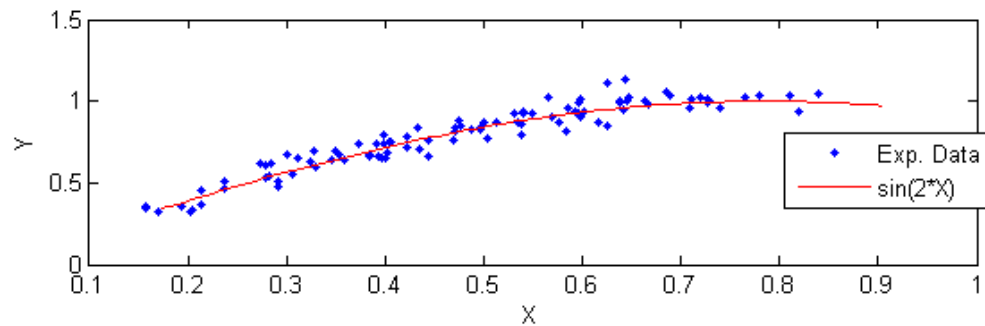
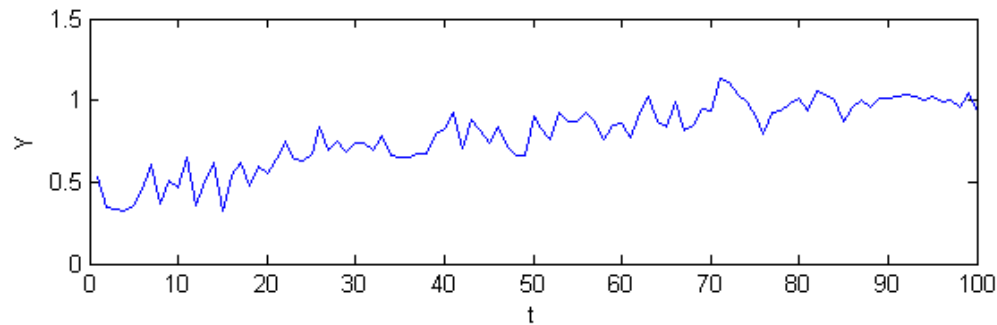
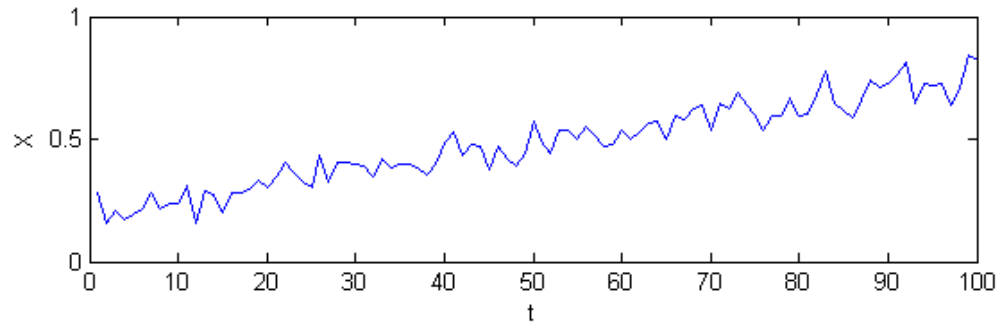
Мера силы причинной связи (информационной асимметрии): $\gamma = i_{Y|X} / i_{X|Y}$

* [S.M. Korotaev *On the possibility of causal analysis of the geophysical processes* // *Geomagn. Aeron.* 32, 27 (1995)]

Пример использования

$$Y_{\text{"true"}} = \sin(2X_{\text{"true"}})$$

$$Y = \sin(2X) + 0.05\xi, \quad \xi = N(0,1)$$



$$\text{corr}(X, Y) = 0.9342$$

$$i_{X|Y} = 0.4390$$

$$i_{Y|X} = 0.4102$$

$$\gamma = 0.9344$$

ЧАСТЬ II.
«Квантовая»

Энтропия фон Неймана

Квантовое состояние: $\hat{\rho} \rightarrow \rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$$S[\rho] = -\text{Tr}[\rho \log \rho] = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

$$S[|\psi\rangle\langle\psi|] = 0$$

Двусоставные квантовые состояния

A

B

ρ_{AB}

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$$

$$\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$$

$$S[\rho_A] \quad S[\rho_B] \quad S[\rho_{AB}]$$

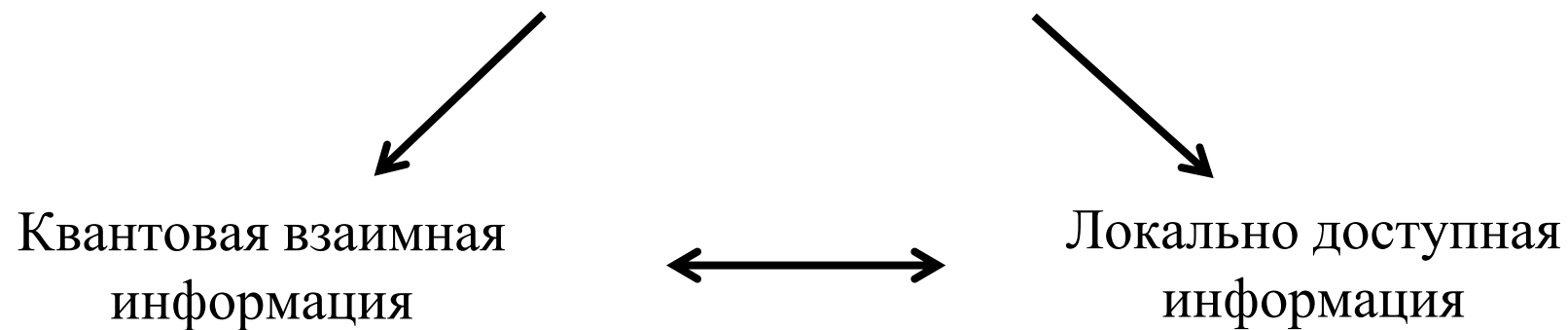
$$\underline{|S[\rho_A] - S[\rho_B]|} \leq S[\rho_{AB}] \leq S[\rho_A] + S[\rho_B]$$

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$$

$$\rho_A = \rho_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$S[\rho_{AB}] = 0 \quad S[\rho_A] = S[\rho_B] = 1$$

Квантовый аналог взаимной информации?..



Квантовая взаимная информация

$$J(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$



$$I[\rho_{AB}] = S[\rho_A] + S[\rho_B] - S[\rho_{AB}]$$

$$S(\rho_1 \parallel \rho_2) = \text{Tr}[\rho_1 \log \rho_1 - \rho_1 \log \rho_2] \geq 0$$

$$S(\rho_1 \parallel \rho_2) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$$

$$I[\rho_{AB}] = S(\rho_{AB} \parallel \rho_A \otimes \rho_B)$$

$$I[\rho_{AB}] = 0 \Leftrightarrow \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$$

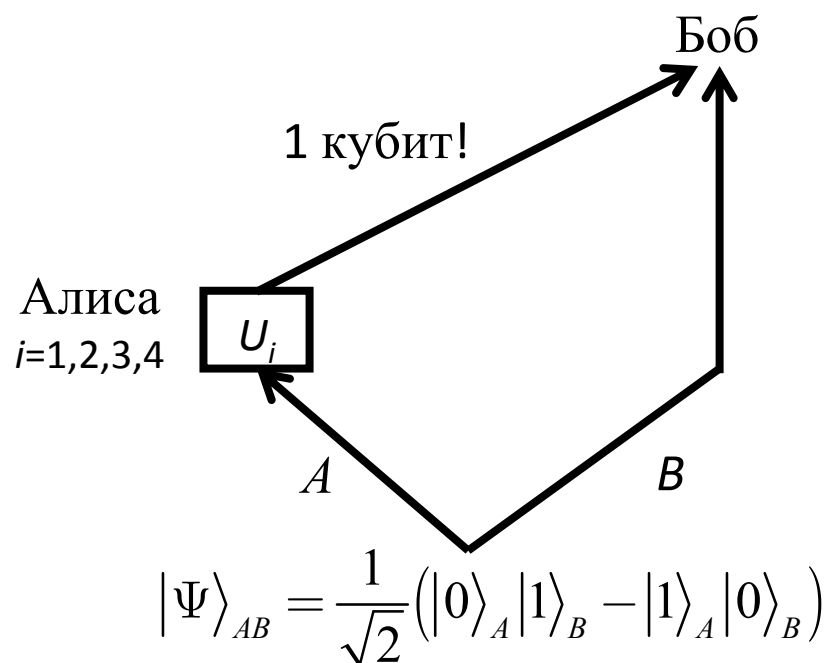
Максимальный уровень корреляций между двумя однокубитными системами

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$$

$$S[\rho_{AB}] = 0 \quad S[\rho_A] = S[\rho_B] = 1$$

$$I[\rho_{AB}] = 2$$

Протокол сверхплотного кодирования



$$U_1 = \text{Id}: |\Psi\rangle \rightarrow |\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

$$U_2 = \sigma_X: |\Psi\rangle \rightarrow |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |00\rangle)$$

$$U_3 = \sigma_Z: |\Psi\rangle \rightarrow |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$U_4 = i\sigma_Y: |\Psi\rangle \rightarrow |\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|11\rangle - |00\rangle)$$

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \delta_{ij}$$

Немного о квантовых измерениях

Положительная операторнозначная мера: $\Pi = \{\Pi_i\}$, $\sum_i \Pi_i = \text{Id}$, $p_i = \text{Tr}[\rho \Pi_i]$
(POVM/POVM)

Пример 1: проективное ортогональное измерение кубита $\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} \end{pmatrix}$

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow p_1 = \rho_{11}, \quad p_2 = \rho_{22}$$

Пример 2: неидеальный фотодетектор $\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{01}^* & \rho_{11} \end{pmatrix}$

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \eta \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \rightarrow p_0 = \rho_{00} + \rho_{11}(1 - \eta), \quad p_1 = \eta \rho_{11}$$

Пример 3: POVM ранга 1 для неортогонального измерения

$$\Pi_1 = \frac{2}{3} |\uparrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \Pi_2 = \frac{2}{3} |\swarrow\rangle\langle\swarrow|, \quad \Pi_3 = \frac{2}{3} |\searrow\rangle\langle\searrow|$$
$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= |0\rangle \\ |\searrow\rangle &= -\cos\frac{\pi}{3}|0\rangle + \sin\frac{\pi}{3}|1\rangle \\ |\swarrow\rangle &= -\cos\frac{\pi}{3}|0\rangle - \sin\frac{\pi}{3}|1\rangle \end{aligned}$$

Локально доступная информация (при заданном варианте измерения)

$$\rho_{AB} \quad (\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}, \quad \rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB})$$



измерение над A



$$p_i = \text{Tr}[\Pi_i \rho_A] \quad \rho_B \rightarrow \rho_B^i = \frac{1}{p_i} \text{Tr}_A[(\Pi_i \otimes \text{Id}) \rho_{AB}]$$

$$J = H(Y) - H(Y|X)$$

$$J^{(A)} = S[\rho_B] - \sum_i p_i S[\rho_B^i]$$

Пример: $|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = 1/2, \rho_B^1 = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

$$p_2 = 1/2, \rho_B^2 = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$S[\rho_B^i] = 0, S[\rho_B] = 1, J^{(A)} = 1$$

Квантовый дискорд

[H. Ollivier and W.H. Zurek // PRL 88 (2001)]

[L. Henderson and V. Vedral // J. of Phys. A 34 (2001)]

Обзор 1 [K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral // Rev. Mod. Phys. 84 (2012) 1655]

Обзор 2 [С.М. Алдошин, Э.Б. Фельдман, М.А. Юрищев // Физика низких температур, 2014, т. 40, № 1, с. 5–21]

$$D^{(A)} = I - \max_{\{\Pi_i\}} J^{(A)}$$



Измерение фон Неймана **vs** ПОВМ ранга 1

Возможна ситуация: $D^{(A)} \neq D^{(B)}$

Запутанность  Дискорд

Пример*:
$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} [|0\rangle \langle 0| \otimes |+\rangle \langle +| + |1\rangle \langle 1| \otimes |-\rangle \langle -| +$$
$$+ |+\rangle \langle +| \otimes |1\rangle \langle 1| + |-\rangle \langle -| \otimes |0\rangle \langle 0|]$$

Квантовый дискорд для X-состояний

$$\rho_{AB}^X = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03} \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{12}^* & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{03}^* & 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 & \rho_{03} \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 \\ 0 & \rho_{12} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{03} & 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix}$$

[Mazhar Ali, A. R. P. Rau, and G. Alber Phys. Rev. A 81, 2010, 042105]

[Qing Chen et al. Phys. Rev. A 84, 2011, 042313]

[Min Namkung, Jinho Chang, Jaehee Shin, Younghun Kwon arXiv:1404.6329]

$$\left(|\rho_{12}| + |\rho_{03}|\right)^2 \leq (\rho_{00} - \rho_{11})(\rho_{33} - \rho_{22}) \rightarrow \Pi = \{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$$

$$\left|\sqrt{\rho_{00}\rho_{33}} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}\right| \leq |\rho_{12}| + |\rho_{03}| \rightarrow \Pi = \{|+\rangle\langle +|, |-\rangle\langle -|\}$$

Квантовый причинный анализ

$$\left. \begin{aligned} i_{A|B} &= \frac{S_{AB} - S_B}{S_A} = \frac{S_A - I}{S_A} = \frac{S_{A|B}}{S_A} \\ i_{B|A} &= \frac{S_{AB} - S_A}{S_B} = \frac{S_B - I}{S_B} = \frac{S_{B|A}}{S_B} \end{aligned} \right\} \text{ функции независимости}$$

$$-1 \leq i_{\bullet\bullet} \leq 1$$



Чистые
запутанные
состояния

$$d = i_{A|B} - i_{B|A} = I \frac{S_A - S_B}{S_A S_B}, \quad |d| < 2$$

$d > 0$ A – «причина»
 B – «следствие»

$$S_A = S_B, \quad d = 0$$

Применение квантового причинного анализа

Устойчивость к декогеренции двухкубитных состояний

Kiktenko E.O., Korotaev S.M. Causal analysis of asymmetric entangled states under decoherence // Phys. Lett. A, V. 376, 2012, P. 820–823.

Устойчивость к декогеренции трехкубитных состояний:

Korotaev S.M., Kiktenko E.O. Causality and decoherence in the asymmetric states // Phys. Scr. V. 85, 2012, P. 055006.

Взаимодействие атом-поле в модели Джейнса-Каммингса

Kiktenko E.O., Korotaev S.M. Entanglement and causality in the interaction of the two-level atom with the field // Phys. Scr. V. 88, 2013, P. 055008.

Анализ протокола телепортации с постселекцией

Kiktenko E.O., Korotaev S.M. Causality in quantum teleportation // Herald of BMSTU Natural sciences № 6, 2014, P. 24-66 (In Russian).

Квантовый причинный анализ в томографическом подходе

Kiktenko E.O., Fedorov A.K. Tomographic causal analysis of two-qubit states and tomographic discord // Phys. Lett. A, V. 378, Iss. 24–25, 2014, P. 1704–1710.

Квантовый причинный анализ системы двух взаимодействующих осцилляторов

Fedorov A.K., Kiktenko E.O., Man'ko O.V., Man'ko V.I. Tomographic discord for a system of two coupled nanoelectric circuits // arXiv:1409.5265.

ЧАСТЬ III

Частицы со спином $\frac{1}{2}$ в неоднородном магнитном поле

Частицы со спином $\frac{1}{2}$ в неоднородном магнитном поле

$$H = J \left(S_A^x \otimes S_B^x + S_A^y \otimes S_B^y \right) + B_A S_A^z \otimes \text{Id}_2 + B_B \text{Id}_2 \otimes S_B^z$$

$$S_j^i = \frac{1}{2} \sigma_j^i; \quad j = A, B; \quad i = x, y, z$$

$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{H}{T} \right)$$

$$Z = \text{Tr} \left[\exp \left(-\frac{H}{T} \right) \right]$$

Термальное состояние

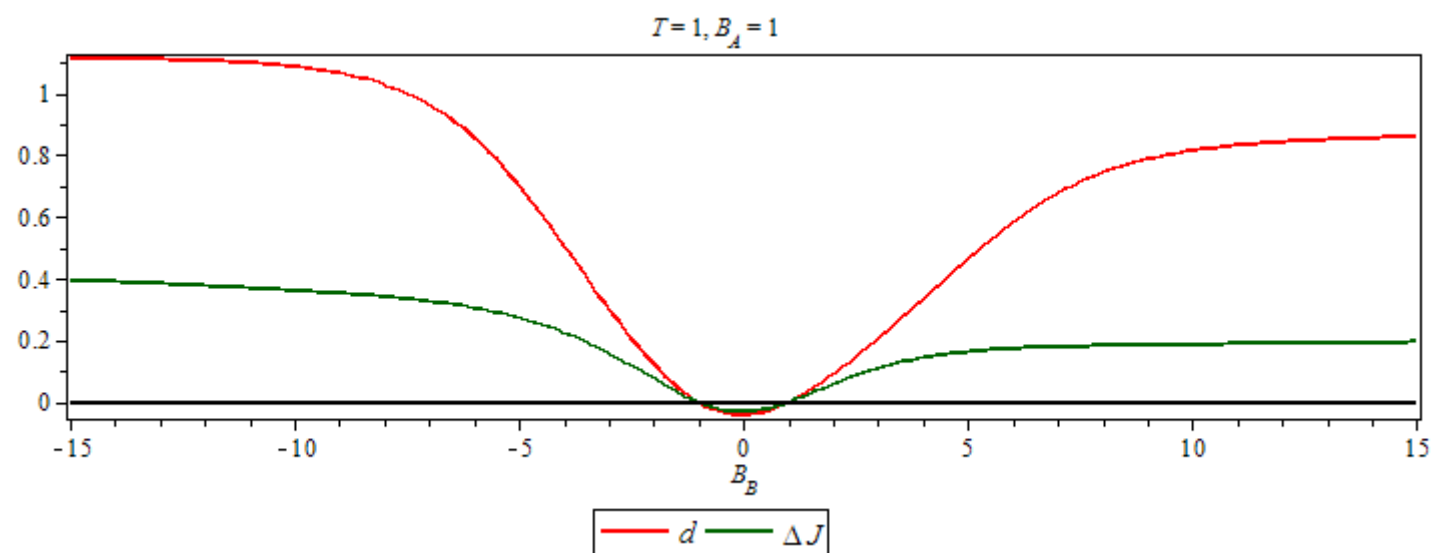
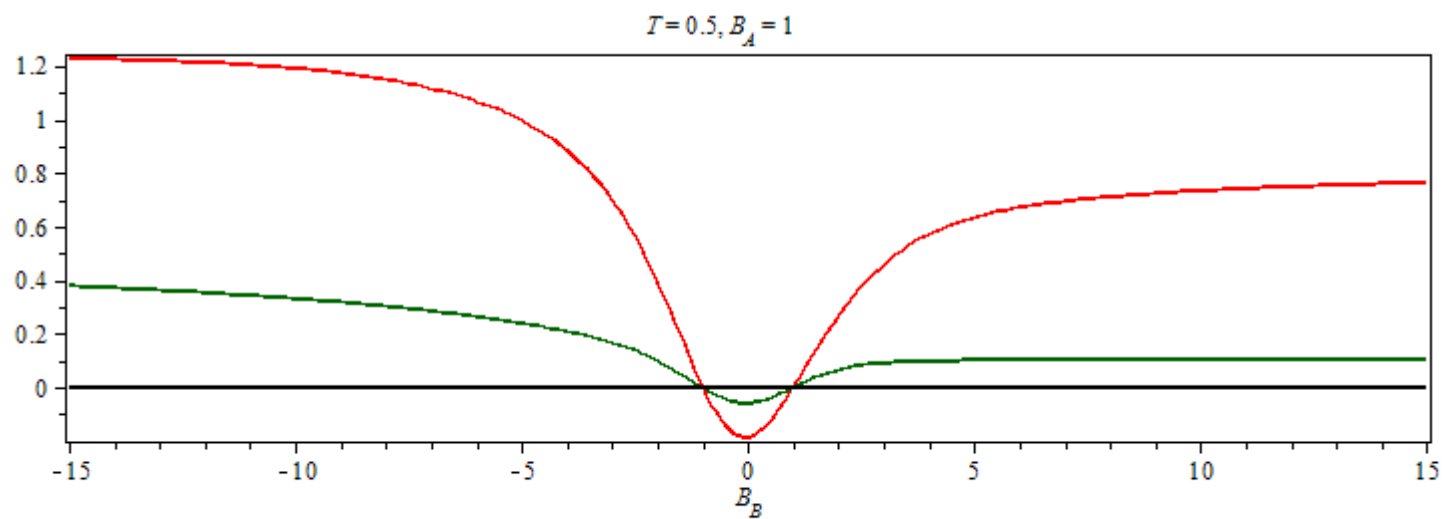
$$\rho_{AB} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{(B_A+B_B)/T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m+n & -s & 0 \\ 0 & -s & m-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-(B_A+B_B)/T} \end{pmatrix}$$

$$m = \text{ch}\left(\frac{\sqrt{D}}{k_B T}\right) \quad n = \frac{B_A - B_B}{\sqrt{D}} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{D}}{T}\right)$$

$$s = \frac{J \text{sh}\left(\frac{\sqrt{D}}{T}\right)}{\sqrt{D}} \quad D = (B_A - B_B)^2 + J^2 \quad J = 1$$

$$\Delta J = \frac{J^{(A)} - J^{(B)}}{I} = \frac{D^{(B)} - D^{(A)}}{I} \quad \text{VS} \quad d = i_{A|B} - i_{B|A} = I \frac{S_A - S_B}{S_A S_B}$$

Результаты вычислений

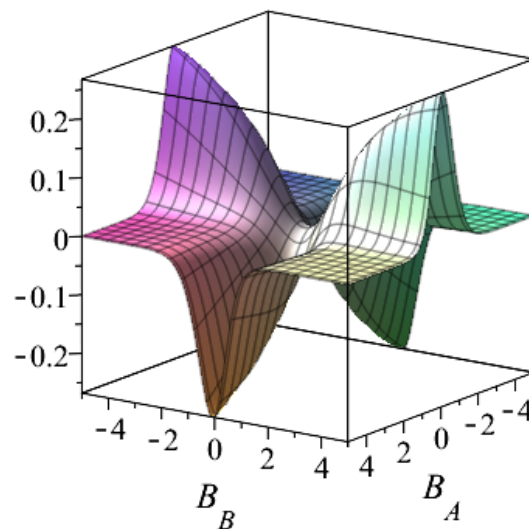


Результаты вычислений

$T = 0.25$

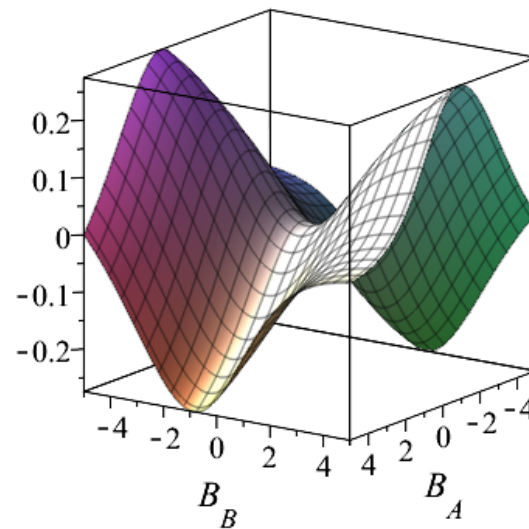
(a)

ΔJ



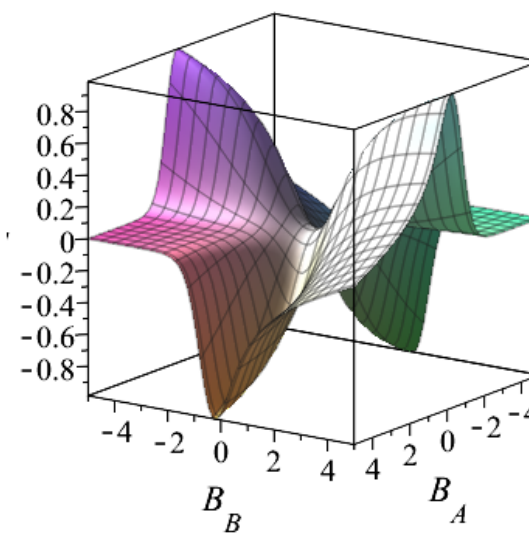
$T = 1$

(b)

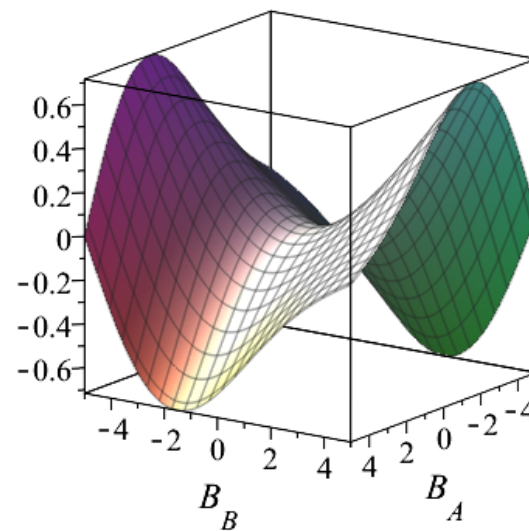


(c)

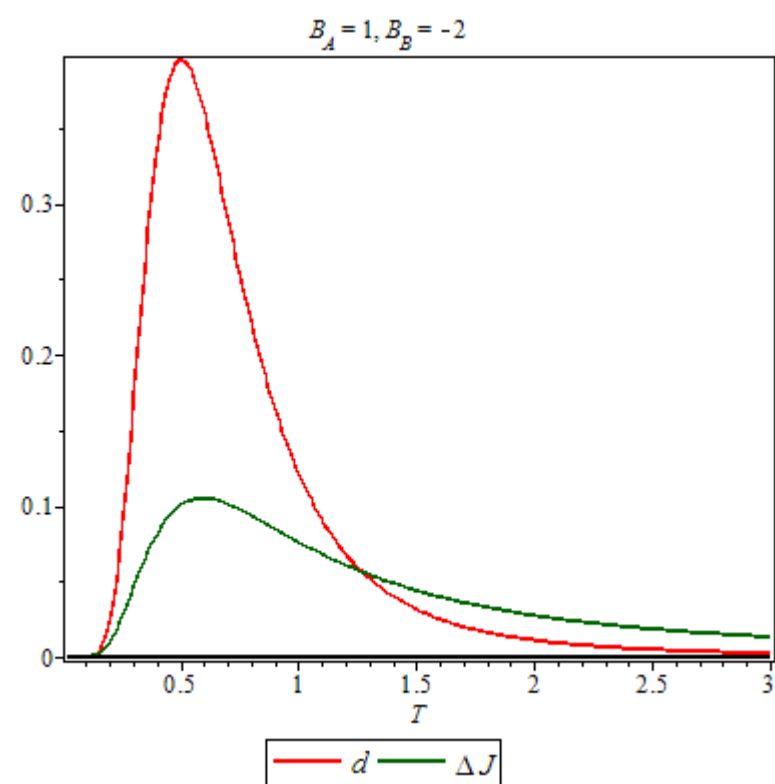
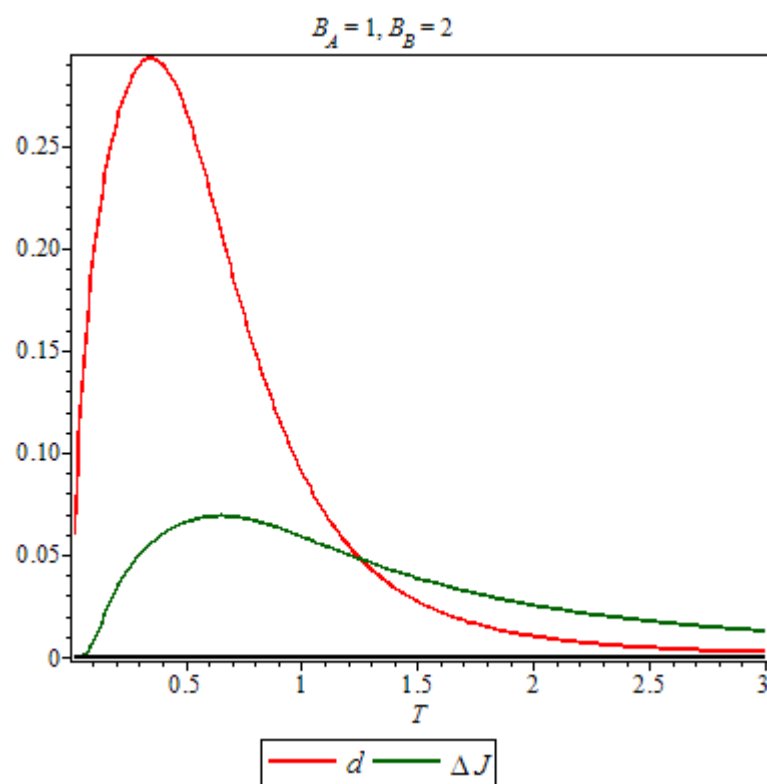
d



(d)



Результаты вычислений



Выводы

- 1) «Следствие» соответствует более сильному модулю поля
- 2) d качественно повторяет ΔJ
- 3) $J(\text{"причина"}) > J(\text{"следствие"})$

Спасибо за внимание!