Функциональные уравнения и многообразия с действием тора

В.М. Бухштабер

МИАН им. В.А.Стеклова, ИППИ им. А.А.Харкевича РАН

Общеинститутский математический семинар
Санкт-Петербургского Отделения
Математического Института им. В. А. Стеклова РАН
30 октября 2014 г.

Мы рассмотрим гладкие многообразия
с гладким действием компактного тора
и изолированными неподвижными точками.

Такие действия естественно возникают
в различных областях математики.

Они играют важную роль в торической геометрии,
торической топологии,
в теории однородных пространств компактных групп Ли.

Теория родов Хирцебруха многообразий —
один из наиболее известных разделов
алгебраической топологии,
с важными приложениями
в теории операторов на многообразиях,
алгебраической топологии, математической физике
и комбинаторике.

В случае многообразий с действием компактного тора
возникают деформации родов Хирцебруха,
эквивариантные роды
и фундаментальная проблема жесткости этих родов.

В центре внимания доклада будут функциональные уравнения, соответствующие локализациям эквивариантных родов Хирцебруха.

Мы обсудим функциональные уравнения задающие роды Хирцебруха жесткие на однородных пространствах компактных групп Ли.

Покажем, что среди таких уравнений имеются классические и новые, так называемые, интегрируемые функциональные уравнения, т.е. обладающие общим аналитическим решением.

Все необходимые определения будут даны в ходе доклада.

Основная конструкция

Пусть даны

набор $\Lambda = \{\Lambda_i, i = 1, \dots, m\}$
целочисленных $(k \times n)$-matrices Λ_i

и отображение $\varepsilon : [1, m] \to \{-1, 1\}$.

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо над $\mathbb{Q}$.

Каждому ряду $f(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots \in A[[x]]$
сопоставим характеристическую функцию пары (Λ, ε):

$$L(\Lambda, \varepsilon; f)(t) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon(i) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{f(\langle \Lambda_i^j, t \rangle)}. \tag{1}$$

Здесь $t = (t_1, \dots, t_k)$, $\Lambda_i^j, j = 1, \dots, n$ — k-мерные
вектор-столбцы из Λ_i и $\langle \Lambda_i^j, t \rangle = \Lambda_i^{j,1} t_1 + \dots + \Lambda_i^{j,k} t_k$.

Допустимые пары

Положим

$$f(x) = \frac{x}{Q(x)}, \qquad Q(0) = 1.$$

Имеем

$$L(\Lambda, \varepsilon; f)(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(i) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\langle \Lambda_i^j, t \rangle} \right) \prod_{j=1}^{n} Q\left(\langle \Lambda_i^j, t \rangle \right). \qquad (2)$$

Пара (Λ, ε) называется допустимой, если

$$L(\Lambda, \varepsilon; f)(t) \in A[[t]]$$

для любого кольца A и для любого ряда

$$f(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots \in A[[x]].$$

Универсальный ряд

Допустимость пары (Λ, ε) достаточно проверить на универсальном ряде

$$f_u(x) = x + \sum_{q\geqslant 1} a_q x^{q+1} \in \mathcal{A}[[x]],$$

где $\mathcal{A} = \sum_{n\geqslant 0} \mathcal{A}_{-2n} = \mathbb{Q}[a_1, \ldots, a_q, \ldots]$, $\deg a_q = -2q$.

Положим $\deg t_l = 2$ для $l = 1\ldots, k$.
Если пара (Λ, ε) допустима, то

$$L(\Lambda, \varepsilon; f_u)(t) = \sum_{\omega} P_\omega t^\omega, \tag{3}$$

где $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ — набор целых неотрицательных чисел, $t^\omega = t_1^{i_1} \ldots t_k^{i_k}$, $\quad |\omega| = i_1 + \ldots + i_k$ и $P_\omega \in \mathcal{A}_{-2(n+|\omega|)}$.

Заметим, что $L(\Lambda, \varepsilon; f_u)(0) = P(a_1, \ldots, a_n)$, где $P(\cdot) = P_\varnothing(\cdot)$, $\deg P_\varnothing = -2n$.

Жесткие пары

Пара (Λ, ε) называется жесткой для семейства рядов $\mathcal{F}$, если

$$L(\Lambda, \varepsilon; f)(t) \equiv L(\Lambda, \varepsilon; f)(0) = P(a_1, \ldots, a_n) \in A$$

для любого ряда $f \in \mathcal{F}$.

Проблема

Найти решение функционального уравнения жесткости

$$L(\Lambda, \varepsilon; f)(t) \equiv C$$

где C — константа по t,
то есть, для заданной пары (Λ, ε), найти семейство рядов $\mathcal{F}$ и вычислить полином $C = P(a_1, \ldots, a_n)$.

Теорема

Рассмотрим гладкое ориентированное многообразие M^{2n} *с гладким действием компактного тора* T^k *таким, что все неподвижные точки изолированы. Имеет место соответствие*

$$\mathcal{L} : (M^{2n}, T^k) \to (\Lambda, \varepsilon).$$

Доказательство.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — набор всех неподвижных точек.
Тогда в касательном пространстве $\tau_i \simeq \mathbb{R}^{2n}$ к точке x_i задано представление тора T^k.

Для заданного базиса в T^k можно выбрать набор весов

$$\Lambda_i^j = \{\Lambda_i^{j,1}, \ldots, \Lambda_i^{j,k}\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Определено отображение

$$\varepsilon : [1, m] \to \{-1, 1\},$$

где $\varepsilon(i) = 1$, если ориентация пространства τ_i, индуцированная ориентацией многообразия M^{2n}, совпадает с ориентацией в τ_i, заданной набором весов Λ_i^j,
и $\varepsilon(i) = -1$, если это не так.

Таким образом определено соответствие $\mathcal{L}$.

Стабильно комплексные T^k-многообразия

Пусть (M^{2n}, T^k) — гладкое многообразие M^{2n}
с действием тора T^k.

Существует линейное представление тора T^k в $\mathbb{R}^{2N} \simeq \mathbb{C}^N$
и эквивариантное вложение $M^{2n} \subset \mathbb{C}^N$.
Пусть $\nu_N(M^{2n})$ — нормальное расслоение этого вложения.

Пара (M^{2n}, T^k) называется стабильно комплексным
T^k-многообразием если существует N,
такое что $\nu_N(M^{2n})$ является комплексным T^k-расслоением.

Если (M^{2n}, T^k) — стабильно комплексное T^k-многообразие,
то многообразие M^{2n} является стабильно комплексным
T^k-многообразием, а значит оно является ориентируемым.

Род Хирцебруха (комплексный случай)

Пусть

$$f(x) = x + \sum_{q\geqslant 1} a_q x^{q+1} \in A[[x]], \quad \text{как и выше.}$$

Ряд

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{f(t_i)}$$

можно представить в виде $L_f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где σ_k — k-й элементарный симметрический полином от $t_1, \dots, t_n$.

Имеем $\quad L_f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1 - a_1\sigma_1 + (a_1^2 - a_2)\sigma_1^2 + (2a_2 - a_1^2)\sigma_2 + \dots$

Род Хирцебруха L_f стабильно комплексного многообразия M^{2n} с касательным классом Черна $c_i = c_i(\tau(M^{2n}))$ и фундаментальным циклом $\langle M^{2n}\rangle$ определяется формулой

$$L_f(M^{2n}) = (L_f(c_1, ..., c_n), \langle M^{2n}\rangle) \in A_{-2n}.$$

Универсальный ряд $f_u(x)$ определяет изоморфизм

$$L_{f_u} : \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_q, \dots],$$

где Ω_U — кольцо кобордизмов стабильно-комплексных многообразий и a_q, $q = 1, 2, \dots$ — коэффициенты ряда f.

Ряд $f(x) \in A[[x]]$ задаёт кольцевой гомоморфизм

$$L_f : \Omega_U \to A.$$

Эквивариантный род

Пусть (M^{2n}, T^k) — стабильно комплексное T^k-многообразие M^{2n} с действием тора T^k.
Для ряда $f(x)$ задан эквивариантный род

$$L_f(M^{2n}, T^k)(t) = L_f([M^{2n}]) + \sum_{|\omega|>0} Q_\omega t^\omega,$$

где $Q_\omega = L_f(B_\omega^{2(n+|\omega|)})$.

Здесь $[M^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$ — класс комплексных кобордизмов многообразия M^{2n} и $B_\omega^{2(n+|\omega|)} \in \Omega_U^{-2(n+|\omega|)} \otimes \mathbb{Q}$ для всех ω.

Конструкция допустимых пар

Из теоремы локализации для эквивариантного рода (В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов, N. Ray IMRN, 2010), получаем

Следствие

Пусть (M^{2n}, T^k) *— стабильно комплексное* T^k*-многообразие с изолированными неподвижными точками. Тогда соответствие*

$$\mathcal{L} : (M^{2n}, T^k) \to (\Lambda, \varepsilon)$$

дает допустимую пару (Λ, ε) *и*

$$L_f(M^{2n}, T^k)(t) = L(\mathcal{L}(M^{2n}, T^k), f)(t).$$

Более того, для каждого $\mathcal{L}(M^{2n}, T^k)$ имеет место уравнение:

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon(i) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\langle \Lambda_i^j, t \rangle} \equiv 0.$$

Пара (M^{2n}, T^k) называется комплексным T^k-многообразием, если M^{2n} — комплексное многообразие с голоморфным действием тора T^k.

Пара (M^{2n}, T^k) называется почти комплексным T^k-многообразием, если на касательном расслоении $\tau(M^{2n})$ фиксирована структура комплексного T^k-расслоения.

Структура комплексного или почти комплексного T^k-многообразия (M^{2n}, T^k) задает структуру стабильно комплексного многообразия (M^{2n}, T^k) и, следовательно, допустимую пару (Λ, ε).

Для каждой такой пары $\varepsilon(i) = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

Комплексные проективные пространства

$$\mathbb{C}P^n = \{(z_1 : \ldots : z_{n+1}); (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}\}$$

обладает структурой T^{n+1}-комплексного многообразия, с неподвижными точками $e_k = (\delta_k^1, \ldots, \delta_k^{n+1})$, $k = 1, \ldots, n+1$, $\delta_k^i = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_k^k = 1$.

Веса в e_k являются n-мерными векторами, такими что $\langle \Lambda_j^k, t \rangle = t_j - t_k$, $j \neq k$, а знаки $\varepsilon(e_k) \equiv 1$.

Для любого ряда $f(x) \in A[[x]]$ такого что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} \frac{1}{f(t_j - t_i)} \in A[[t_1, \ldots, t_{n+1}]].$$

Комплексная проективная прямая

$$\mathbb{C}P^1 = \{(z_1 : z_2); (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Действие T^2 на $\mathbb{C}P^1$: $(z_1 : z_2) \to (t_1 z_1 : t_2 z_2)$ имеет две неподвижные точки $(1:0)$ и $(0:1)$.

Функциональное уравнение жесткости:

$$\frac{1}{f(t_2 - t_1)} + \frac{1}{f(t_1 - t_2)} \equiv C, \quad \text{где} \quad f(x) = x + \ldots, \quad C = -2a_1.$$

Общее аналитическое решение

$$f(x) = \frac{x}{q(x^2) - a_1 x}, \quad \text{где} \quad q(0) = 1.$$

L-род Хирцебруха — сигнатура многообразия

Функциональное уравнение жёсткости для $\mathbb{C}P^2$:

$$\frac{1}{f(t_1-t_2)f(t_1-t_3)}+\frac{1}{f(t_2-t_1)f(t_2-t_3)}+\frac{1}{f(t_3-t_1)f(t_3-t_2)}\equiv C.$$

Из этого уравнения получаем

$$C=3(2a_1^2-a_2), \qquad (2a_1^2-a_2)(a_1^3-2a_1a_2+a_3)^2=0.$$

Если $f(x)$ — решение этого уравнения и $f(-x)=-f(x)$, то

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+Cf(x)f(y)},$$

то есть $f(x)=\frac{1}{\sqrt{C}}th(\sqrt{C}x)$.
Этот ряд определяет наиболее знаменитый род Хирцебруха — *сигнатуру*.

Пусть расслоение $\mathbb{C}P(\xi) \to B$ со слоем $\mathbb{C}P(2)$ является проективизацией 3-мерного комплексного векторного расслоения $\xi \to B$.

Род Хирцебруха $L_f : \Omega_U \to R$ называется $\mathbb{C}P(2)$-*мультипликативным*, если $L_f[\mathbb{C}P(\xi)] = L_f[\mathbb{C}P(2)]L_f[B]$.

Если род L_f является $\mathbb{C}P(2)$-мультипликативным, то он жёсткий на $\mathbb{C}P(2)$.

Определение

Будем называть *специальным* $\mathbb{C}P(2)$-*мультипликативным родом* $\mathbb{C}P(2)$-мультипликативный род L_f, такой что $L_f[\mathbb{C}P(2)] = 0$.

Теорема (В.М. Бухштабер, Е.Ю. Нетай 2014)

Пусть L_f — $\mathbb{C}P(2)$*-мультипликативный род.*
Если $L_f[\mathbb{C}P(2)] \neq 0$, *то* L_f — *двупараметрический род Тодда, и*

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x}}, \tag{4}$$

Если $L_f[\mathbb{C}P(2)] = 0$, *то есть* L_f — *специальный* $\mathbb{C}P(2)$*-мультипликативный род, то он является общим двупараметрическим эллиптическим родом*

$$f(x) = -\frac{2\wp(x) + \frac{a^2}{2}}{\wp'(x) - a\wp(x) + b - \frac{a^3}{4}}. \tag{5}$$

Здесь $\wp$ *и* $\wp'$ — *функции Вейерштрасса эллиптической кривой с параметрами* $g_2 = -\frac{1}{4}(8b - 3a^3)a$, $g_3 = \frac{1}{24}(8b^2 - 12a^3b + 3a^6)$, *и дискриминантом* $\Delta = -b^3(3b - a^3)$.

В терминах коэффициентов ряда $f(x)$ имеем:

в первом случае
$2a_1 = -(\alpha + \beta), \quad 3a_2 = \alpha\beta + 2a_1^2, \quad a_3 = 2a_1 a_2 - a_1^3,$

во втором случае
$2a_1 = -a$, $2a_2 = a^2$, $8a_3 = 4b - 3a^3$.

Следствие

В случае $a_2 = 2a_1^2, \quad a_3 = 3a_1^3$, *мы имеем "случай пересечения":*

$$f(x) = \frac{2}{k}\frac{tg(y)}{tg(y) + \sqrt{3}}, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}kx. \tag{6}$$

Рассмотрим ряд

$$f(x) = \frac{e^{a_1 x}}{\Phi(x)}, \tag{7}$$

где

$$\Phi(x) = \Phi(x; g_2, g_3) = \frac{\sigma(x+\tau)}{\sigma(x)\sigma(\tau)} e^{-\zeta(\tau)x}$$

— функция Бейкера-Ахиезера эллиптической кривой с параметрами Вейерштрасса g_2, g_3.

Здесь $\sigma(x) = \sigma(x; g_2, g_3)$ and $\zeta(x) = \zeta(x; g_2, g_3)$ — функции Вейерштрасса эллиптической кривой.

Род Кричевера

Определение

Род Хирцебруха, определяемый рядом (7)

$$f(x) = \frac{e^{a_1 x}}{\Phi(x)},$$

называется *родом Кричевера*.

Для этого рода имеет место следующий важный результат:

Теорема (И.М. Кричевер, 1990)

Эквивариантный род L_f определяемый рядом (7) жёсток на SU-многообразиях с действием тора.

Функция Бейкера-Ахиезера $\Phi(x)$ может быть разложена в ряд коэффициенты которого — полиномы от $\wp(\tau), \wp'(\tau)$ и g_2.

Лемма

Равенство (7) соответствует изоморфизму

$$\mathbb{Q}[a_1, a_2, a_3, a_4] \to \mathbb{Q}[a_1, \wp(\tau), \wp'(\tau), g_2], \tag{8}$$

где

$$a_1 \mapsto a_1, \quad a_2 \mapsto \frac{1}{2}(\wp(\tau)+a_1^2), \quad a_3 \mapsto \frac{1}{6}\left(\wp'(\tau) + 3a_1\wp(\tau) + a_1^3\right),$$
$$a_4 \mapsto \frac{1}{24}\left(9\wp(\tau)^2 - \frac{3}{5}g_2 + 4a_1\wp'(\tau) + 6a_1^2\wp(\tau) + a_1^4\right).$$

Следствие

Коэффициенты a_k, $k > 4$ ряда $f(x)$ для рода Кричевера могут быть выражены используя (8) как полиномы от a_1, a_2, a_3, a_4.

Теорема (В.М. Бухштабер, Е.Ю. Нетай 2014)

Специальный $\mathbb{C}P(2)$*-мультипликативный род является специальным родомКричевера, и* (5) *может быть записано как*

$$f(x) = \frac{\sigma(x)\sigma(\tau)}{\sigma(x+\tau)} \exp\left(-\frac{a}{2}x + \zeta(\tau)x\right)$$

для функции Бейкера-Ахиезера с параметрами

$$g_2 = \frac{3}{4}(24b + a^3)a, \quad g_3 = -\frac{1}{8}(72b^2 + 60a^3b - a^6),$$
$$\Delta = -81b(3b - a^3)^3.$$

Параметр τ *определяется соотношениями*

$$\wp(\tau, g_2, g_3) = \frac{3}{4}a^2, \qquad \wp'(\tau, g_2, g_3) = 3b - a^3.$$

Следствие

Каждый $\mathbb{C}P(2)$-мультипликативный род жёсток на многообразиях с S^1-эквивариантной SU-структурой.

Параметры специального $\mathbb{C}P(2)$-мультипликативного рода образуют многообразие

$$\mathcal{K} = \left\{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_2 = 2a_1^2, \quad 5a_4 = -2a_1(8a_1^3 - 7a_3)\right\}$$

в пространстве параметров рода Кричевера.
Заметим, что выражение ряда $f(x)$
для специального $\mathbb{C}P(2)$-мультипликативного рода
в терминах $\wp$-функции Вейерштрасса
и функции Бейкера-Ахиезера
соответствуют разным функциям g_2 и g_3 в $\mathcal{K}$:
в первом случае

$$g_2 = 4a_1(2a_3 - 3a_1^3), \quad g_3 = \frac{4}{3}a_3^2 - 4a_1^6,$$

во втором случае

$$g_2 = -12a_1(6a_3 - 19a_1^3), \quad g_3 = -4(9a_3^2 - 84a_1^3a_3 + 169a_1^6).$$

Пусть G — компактная связная группа Ли,
H — её связная компактная подгруппа, имеющая тот же ранг,
и T^k — их общий максимальный тор.

На гладком ориентированном многообразии $M^{2n} = G/H$
определено левое действие группы G.
Оно индуцирует гладкое действие T^k
с изолированными неподвижными точками $x_1, \dots, x_m$,
где x_1 — образ единицы $e \in G$ при проекции $G \to M^{2n}$,
$x_i = w_i x_1$, где w_i — элемент группы Вейля $W(G)$
и $m = |W(G)/W(H)|$.

При соответствии

$$\mathcal{L} : (M^{2n}, T^k) \to (\Lambda, \varepsilon)$$

получаем:

$$\Lambda_i^j = w_i \Lambda_1^j,$$

где $\{\Lambda_1^j\}$ — набор весов представления тора T^k в факторпространстве алгебры $\mathcal{G}(G)$ по подалгебре $\mathcal{G}(H)$.

В случае $H_2(M^{2n};\mathbb{Z}) \neq 0$ однородное пространство $M^{2n} = G/H$ является комплексным T^k-многообразием.

Примеры:

- Комплексные многообразия флагов:

$$F_n = U(n)/T^n.$$

- Комплексные многообразия Грассмана:

$$G_{n,q} = U(n)/(U(q) \times U(n-q)).$$

- Обобщённые комплексные многообразия флагов:

$$G_{n,q_1,\ldots,q_l} = U(n)/(U(q_1) \times \ldots \times U(q_l)),$$

где $q_1 + \ldots + q_l = n$.

В случае $H_2(M^{2n};\mathbb{Z})=0$ однородное пространство $M^{2n}=G/H$, где H является централизатором некоторого элемента $g\in G$ нечетного порядка,
обладает G-инвариантной почти комплексной структурой.

Пример.
Сфера $S^6=G_2/SU(3)$
обладает G_2-инвариантной почти комплексной структурой,
так как $SU(3)$ является централизатором элемента $g\in G_2$ порядка 3, который порождает центр группы G_2.

Эта почти комплексная структура на S^6 неинтегрируема.

Почти комплексное T^2-многообразие S^6

Действие тора $T^2 \subset G_2$ на S^6
имеет 2 неподвижные точки x_1 и x_2 с весами

$$
\begin{array}{llll}
x_1: & \Lambda_1^1 = (1,0), & \Lambda_1^2 = (0,1), & \Lambda_1^3 = (-1,-1), \\
x_2: & \Lambda_2^1 = (-1,0), & \Lambda_2^2 = (0,-1), & \Lambda_2^3 = (1,1).
\end{array}
$$

Функциональное уравнение жесткости:

$$
\frac{1}{f(t_1)f(t_2)f(-t_1-t_2)} + \frac{1}{f(-t_1)f(-t_2)f(t_1+t_2)} \equiv C.
$$

Почти комплексное T^2-многообразие S^6

Пусть $t_1 = x$, $t_2 = y$. Уравнение жёсткости принимает вид

$$\frac{1}{f(x)f(y)f(-x-y)} + \frac{1}{f(-x)f(-y)f(x+y)} = C. \qquad (9)$$

Положим

$$b(x) = -\frac{f(x)}{f(-x)} = 1 + \sum_{k\geqslant 1} b_k x^k.$$

Мы получаем уравнение

$$b(x+y) = b(x)b(y) - Cf(x)f(y)f(x+y). \qquad (10)$$

Для $C = 0$ мы получаем $b(x) = e^{-\mu x}$,
а функция $f(x)$ определяется соотношением

$$f(-x) = -e^{\mu x} f(x).$$

Пусть $C \neq 0$. Используя оператор

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

из (10) мы получаем

$$Cf(x+y) = \frac{b'(x)b(y) - b(x)b'(y)}{f'(x)f(y) - f(x)f'(y)}.$$

Для $y = 0$ это уравнение принимает вид

$$b'(x) = b_1 b(x) - Cf(x)^2,$$

и таким образом мы получаем $C = \frac{1}{2}(b_1^3 - b_3)$.
Из этих уравнений получаем

$$f(x+y) = \frac{f(x)^2 b(y) - b(x) f(y)^2}{f(x)f'(y) - f'(x)f(y)}. \qquad (11)$$

Почти комплексное T^2-многообразие S^6

Из теоремы В.М. Бухштабера, 1990 г., мы получаем

Следствие

Общее аналитическое решение уравнения (11) — *функция*

$$f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{\Phi(x)},$$

где

$$\Phi(x) = \frac{\sigma(\alpha - x)}{\sigma(x)\sigma(\alpha)} e^{\zeta(\alpha)x}$$

— *функция Бейкера-Ахиезера.*

Род Хирцебруха (ориентированный случай)

Пусть

$$f(x) = x + \sum_{k \geqslant 1} a_{2k} x^{2k+1} \in A[[x]].$$

Произведение чётных рядов

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{t_i}{f(t_i)}$$

может быть представлено в виде $L_f(p_1, \ldots, p_n)$, где p_k — k-й элементарный симметрический полином от $t_1^2, \ldots, t_n^2$.

Имеем $\quad L_f(p_1, \ldots, p_n) = 1 - a_2 p_1 + (a_2^2 - a_4) p_1^2 + (2a_4 - a_2^2) p_2 + \ldots$

Род Хирцебруха L_f ориентированного многообразия M^{4n} с касательными классами Понтрягина

$$p_k(\tau(M^{4n})) = (-1)^k c_{2k}(\tau_{\mathbb{C}}(M^{4n}))$$

и фундаментальным циклом $\langle M^{4n} \rangle$ определяется формулой

$$L_f(M^{4n}) = (L_f(p_1, \ldots, p_n), \langle M^{4n} \rangle) \in A_{-4n}.$$

Построение допустимых пар

Из теоремы локализации для эквивариантного рода получаем

Следствие

Пусть (M^{4n}, T^k) *— ориентированное* T^k*–многообразие* M^{4n}*. Соответствие*

$$\mathcal{L} : (M^{4n}, T^k) \to (\Lambda, \varepsilon)$$

задаёт допустимую пару (Λ, ε) *и*

$$\mathcal{L}_f(M^{4n}, T^k) = L(\mathcal{L}(M^{4n}, T^k), f).$$

Пусть (M^{4n}, T^k) — ориентированное T^k-многообразие.
Для нечётного ряда $f(x) = x + \sum_{q\geqslant 1} a_{2q} t^{2q+1}$
определён эквивариантный род

$$L_f(M^{4n}, T^k) = L_f[M^{4n}] + \sum Q_\omega t^\omega,$$

где $Q_\omega = L_f(c_\omega^{4(n+|\omega|)})$.
Здесь $[M^{4n}] \in \Omega_{SO}^{-4n}$ — класс ориентированных кобордизмов многообращия M^{4n} и $c_\omega^{4(n+|\omega|)} \in \Omega_{SO}^{-4(n+|\omega|)} \otimes \mathbb{Q}$ для всех ω.
В кольце ориентированных кобордизмов Ω_{SO} имеет место эпиморфизм

$$\mu_U^{SO} : \mathbb{Q}[a_1, \ldots, a_q, \ldots] = \Omega_U \otimes \mathbb{Q} \to \Omega_{SO} \otimes Q = Q[a_2, \ldots, a_{2q}, \ldots],$$

где $\mu_U^{SO}(a_{2q}) = a_{2q}$, $\mu_U^{SO}(a_{2q+1}) = 0$.

$$\mathbb{H}P^n = \{(q_1 : \ldots : q_{n+1}); (q_1, \ldots, q_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1}\}$$

$$\text{где} \quad (q_1, \ldots, q_{n+1}) = (q_1 q, \ldots, q_{n+1} q), \quad q \in \mathbb{H} \backslash 0.$$

Ориентированное многообразие $\mathbb{H}P^n$
имеет каноническую структуру T^{n+1}-многообразия
с неподвижными точками $e_k = (\delta_k^1, \ldots, \delta_k^{n+1})$, $k = 1, \ldots, n+1$,
где

$$(t_1, \ldots, t_{n+1})(q_1, \ldots, q_{n+1}) = (t_1 q_1, \ldots, t_{n+1} q_{n+1}).$$

Веса в e_k — $2n$-мерные векторы $\{(\Lambda_k^{j,+}, \Lambda_k^{j,-}), j \neq k\}$ такие что $\langle \Lambda_k^{j,\pm}, t \rangle = t_j \pm t_k$.

Для нечётного ряда $f(x) \in A[[x]]$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j \neq k} \frac{1}{f(t_j + t_k) f(t_j - t_k)} \in A[[t_1^2, \ldots, t_{n+1}^2]].$$

$$\mathbb{H}P^1 = \{(q_1 : q_2); (q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2\}.$$

Действие T^2 на $\mathbb{H}P^1$

$$(q_1 : q_2) \to (t_1 q_1 : t_2 q_2)$$

имеет две неподвижные точки $e_1 = (1 : 0)$ и $e_2 = (0 : 1)$.
Эквивариантный род задаётся выражением

$$L_f(\mathbb{H}P^1, T^2) = \frac{1}{f(t_2 + t_1)f(t_2 - t_1)} + \frac{1}{f(t_1 + t_2)f(t_1 - t_2)}.$$

В ориентированных кобордизмах $[\mathbb{H}P^1] = 0$ условие

$$L_f(\mathbb{H}P^1, T^2)(0) = L_f[\mathbb{H}P^1] = 0$$

обеспечивается условием, что $f(x)$ — нечётная.

Уравнение жёсткости для $\mathbb{H}P^2$

Для нечётного ряда $f(x) = x + \ldots$, положив $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = z$, имеем

$$\frac{1}{f(y+x)f(y-x)f(z+x)f(z-x)} + \\ + \frac{1}{f(x+y)f(x-y)f(z+y)f(z-y)} + \\ + \frac{1}{f(x+z)f(x-z)f(y+z)f(y-z)} = C. \quad (12)$$

Положив $z = 0$ и используя, что $f(x)$ нечётна, получаем функциональное уравнение

$$f(x+y)f(x-y) = \frac{f(x)^2 - f(y)^2}{1 - Cf(x)^2 f(y)^2}. \tag{13}$$

Теорема

Общее аналитической решение уравнения (13) — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$f'(x)^2 = 1 + 3a_2 f(x)^2 - Cf(x)^4$$

с начальными условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$,
то есть $f(x) = sn(x)$ — эллиптический синус Якоби.

Доказательство.

Decomposing the left and right hand side of (13) as a series in y and equating the coefficients at y^2 we get the equation

$$(f')^2 = 1 + ff'' - Cf^4. \qquad (14)$$

Using that $f'(x)$ is even and $f'(0) = 1$ we can set

$$(f')^2 = 1 + \sum b_k f^{2k}.$$

Hence $ff'' = \sum kb_k f^{2k}$. Now from (14) we immediately obtain $b_1 = 3a_2$, $b_2 = C$ and $b_k = 0$ for $k > 2$.
Therefore if $f(x)$ satisfies (12),
then it's necessary that $f(x) = sn(x)$.
From the classical addition theorem for Jacobi elliptic sine it follows that $sn(x)$ satisfies (12).

Ochanine genus

Определение

The Hirzebruch genus determined by the series $f(x) = sn(x)$ is called *Ochanine genus*.

Теорема (Ochanine, Bott – Taubes)

Ochanine genus is fiberwise multiplicative for bundles $E \to B$ *of oriented manifolds with fiber* M *being a spin-manifold, that is* $w_2(M) \equiv 0$ *where* w_2 *is the second Stiefel–Whitney class in ordinary cohomology.*

Let B be an oriented manifold
and $\mathbb{H}P(\xi) \to B$ be a bundle with fiber $\mathbb{H}P(2)$,
which is a quaternization of the vector bundle $\xi \to B$.

The Hirzebruch genus $L_f : \Omega_{SO} \to R$
is called $\mathbb{H}P(2)$-multiplicative if

$$L_f[\mathbb{H}P(\xi)] = L_f[\mathbb{H}P(2)]L_f[B].$$

From a theorem of V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray we obtain:

Следствие

Each $\mathbb{H}P(2)$-multiplicative genus is rigid on $\mathbb{H}P(2)$.

Теорема

The Hirzebruch genus L_f is fiberwise multiplicative for bundles of oriented manifolds whose fibers are spin-manifolds if and only if it is Ochanine genus.