

# Использование B-сплайнов для построения желаемой траектории полета мультикоптера

Морозов Юрий, к.ф.-м.н.

ИПУ РАН

Москва, 2014

# Аэрофотосъемка с мультикоптера

## Преимущества:

- 1 Цена (в сравнении с самолетом или вертолетом).
- 2 Мобильность (для развертывания системы достаточно одного человека).
- 3 Простая логистика (комплект оборудования помещается в машине).
- 4 Отсутствие разрешения (масса не более 5кг, высота полета до 100м).

## Задача:

- 1 Автономный взлет и посадка.
- 2 Фотосъемка с заданной высоты.
- 3 Наклон оси камеры от вертикали во время съемки, меньше  $15^\circ$ .
- 4 Итоговый снимок должен содержать границу заданной области.

# Что такое мультикоптер?

Тип	Quadcopter	Hexacopter	Octocopter Type I	Octocopter Type II
Количество “рук”	4	6	8	4
Количество моторов	4	6	8	8
Количество пропеллеров	2 правых + 2 левых	3 правых + 3 левых	4 правых + 4 левых	4 правых + 4 левых
				

- Ни один из представленных на рынке образцов не обладает автономным взлетом. Если исключить парашют, то и автономной посадки у этих экземпляров нет.
- Автономность полета от аккумуляторов не превышает 30 мин, даже при отсутствии ветра.
- Карбоновое шасси (топовые модели).

# Мотор для мультикоптера

Тип мотора				
У10 KV100	MN3508 KV380	MN2206 KV2000	MT3520 KV400	
Вес, кг	0.4	0.082	0.03	0.205
Размер диаметр, мм	86.8	41.8	27	43
высота, мм	35.5	26.5	18.5	45
Максимальный ток, А	35	14	18	38
Максимальная мощность, Вт	1500	310	180	1140
Рабочий диапазон тока, А	3-20	2-7	2-5	4-8
Внутреннее сопротивление, Ом	112	205	82	32
Катушка индукт. шт	36	12	12	12
Магнит, шт	42	14	14	14
Конфигурационное соотношение	36/42=0.857	12/14=0.857	12/14=0.857	12/14=0.857
Эффективность при 50% (100%) нагрузке	16.61	10.25	5.07	10.11
Прод, мм x мм	29x9.5	15x5	7x2.4	15x5
Напряжение, В	22.2	22.2	11.1	22.2
Ток, А	2.6	3.6	4.5	4.5
Мощность, Вт	59	80	52	100
Тяга, г	980 (2820)	820 (1880)	330 (700)	1010(2700)
Обороты, шт	1120 (1820)	3900 (5900)	10800 (14600)	4280(7100)
Цена	329.90\$ (268.90 Евро)	69.90\$ (56.90 Евро)	69.90\$ (56.90 Евро)	99.9\$ (80.9 Евро)

# Мат. модель мультикоптера

$$\begin{aligned}\dot{X} &= V, \\ \dot{V} &= u_T Q e_z + F_{aero}(Q, V), \\ \dot{Q} &= A(\omega(u))Q,\end{aligned}\tag{1}$$

where

$X = (x, y, z)^T \in R^3$  — позиция,

$V = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \in R^3$  — скорость,

$Q = \|q\|_{1,1}^3 \in R^{3 \times 3}$  матрица ориентации,

$\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T \in R^3$  — угловая скорость,

$$A(\omega) = -A^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

$u_T \in R^1$ ,  $|u_T| \leq U_T$  и  $u \in R^3$ ,  $\|u\| \leq U$  — управления.

# Модель мультикоптера в плоскости $O_x$

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= +u_T \cos \phi - g; \\ \ddot{y} &= -u_T \sin \phi; \\ \dot{\phi} &= \omega_x,\end{aligned}\tag{1}$$

где

$X = (y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi) \in R^5$  состояние системы;

$U = (u_T, \omega_x) \in R^2$  компоненты управления.

# Математическая постановка задачи

Пусть дан набор точек  $p = \{p_1, \dots, p_n\}$  каждая точка соответствует состоянию мультикоптера в полете, т.е.  $p_i = \{x_i, y_i, z_i, \phi_i, \theta_i, \psi_i\}$  это вектор в пространстве  $R^6$ .

Необходимо построить вектор-функцию от времени

$$r^*(t) = r(p(t)) \in R^6$$

позволяющую проложить в 6-мерном пространстве допустимую траекторию полета мультикоптера.

Известно, что для мультикоптера можно построить закон управления, обеспечивающий движение вдоль траектории, только в том случае, когда желаемая траектория обладает достаточной гладкостью.

# Желаемая траектория

Оказывается, что желаемую траекторию можно задать в 4-х мерном пространстве

$$r^*(t) = (x^*(t), y^*(t), z^*(t), \psi^*(t)) \in R^4 \quad (2)$$

т.к. 2 другие компоненты можно доопределить в силу системы, для простейшей модели они записываются так

$$\phi^* = \arctan\left(\frac{\ddot{x}^* \cos \psi^* + \ddot{y}^* \sin \psi^*}{\ddot{z}^* + g}\right),$$
$$\theta^* = \arcsin\left(\frac{\ddot{x}^* \sin \psi^* - \ddot{y}^* \cos \psi^*}{\sqrt{\ddot{x}^{*2} + \ddot{y}^{*2} + (\ddot{z}^* + g)^2}}\right).$$

# Аппроксимация траектории полета

Будем аппроксимировать каждую компоненту траектории В-сплайном порядка  $s$ , используя формулу

$$P_i(u) = (u^s, \dots, u^2, u, 1)M_{s+1}(p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+s})^T, \quad (2)$$

где  $M_{s+1} = [m_{i+1,j+1}]_{i,j=0}^s = \frac{1}{s!} C_{s,i} \sum_{m=j}^s (s-m)^i (-1)^{m-j} C_{k,m-j}$ ,

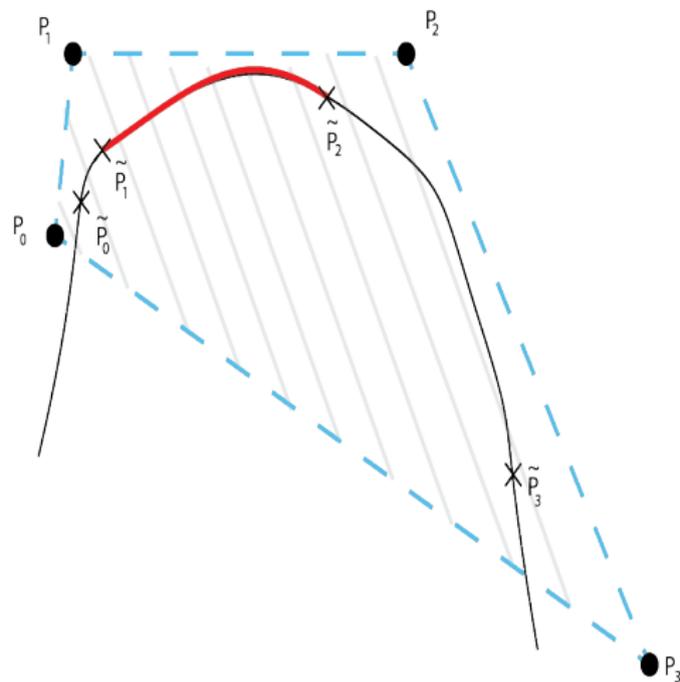
$C_{i,j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ . Здесь, переменная  $u \in [0, 1]$  является параметром

$B_5$ -сплайна и ни как не связана со временем, точки

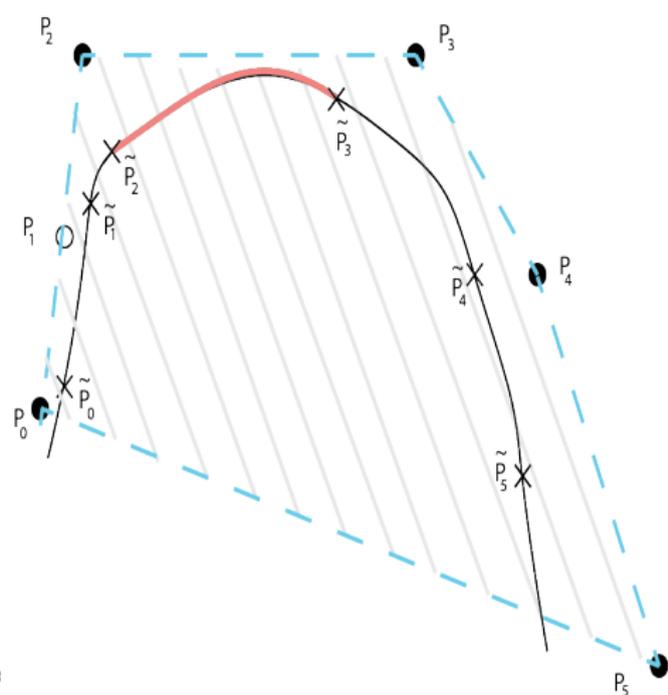
$(p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+s})^T$  известны, причем  $p_i \in R^4$ . Известно, что данные сплайны не проходят точно через заданные точки, а принадлежат некоторому выпуклому множеству, граница которого содержит эти точки. Чем больше требуется гладкость тем больше точек образуют этот выпуклый многогранник и тем больше требуется исходных точек для корректной аппроксимации.

# $B_3$ и $B_5$ -сплайны

$B_3$ -spline



$B_5$ -spline



# Задача минимизации

Обозначим неизвестные вариации  $N$  точек через  $\varepsilon_j = (\varepsilon_1^j, \dots, \varepsilon_N^j)^T$ , а вариации проекций скачков 5-ой производной через  $F_j(\varepsilon_j) = (F_1^j(\varepsilon^j), \dots, F_N^j(\varepsilon^j))^T$ . Найти  $\varepsilon_*^j$  такие, что выполняется условие

$$\min_{|\varepsilon_j| < \mathcal{E}} \|F_j(\varepsilon_j)\|^2 = \|F_j(\varepsilon_*^j)\|^2.$$

Или с учетом матрицы  $C_5$  получаем следующую задачу. Пусть  $\Phi_j(\varepsilon^j) = \frac{1}{2}\varepsilon^j H^j \varepsilon^j + f_j^T \varepsilon^j$ , где  $H^j = C_5^T C_5 + \gamma_j I$ ,

$$\gamma_j > 0, C_5 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}, f_j = C_5^T F^j(0).$$

Имеем задачу

$$\min_{\varepsilon_j} \Phi_j(\varepsilon_j), \quad \varepsilon_j \in \mathcal{R}^N.$$

# Метод сглаживания кривизны

Задача сформулированная ранее, аналогично задаче о сглаживании кривизны. Повторяя рассуждения, получаем для  $N$  заданных точек  $\bar{P}^j$  решение задачи в виде системы алгебраических уравнений

$$(H + \delta_j D^j) \varepsilon^j = -H \bar{P}^j, \quad j = 0, \dots, 4, \quad (4)$$

где параметр  $\delta_j > 0$  является штрафом за отклонение, а элементы матрицы  $D_j = \text{diag}\{1/\sigma_{1,j}^2, \dots, 1/\sigma_{N,j}^2\}$ ,  $\sigma_{i,j}$  пропорциональны шуму измерений GNSS-приемника. В отличие от машины, координаты позиции должны быть полученные для мультикоптера только в режиме FIXED.

Вообще говоря  $\delta_j$  и  $D^j$  должны быть одинаковыми для компонент  $x, y$  желаемой траектории.

# Траектория-кандидат

Имеем набор "новых" точек в виде

$$\hat{p}_i^j = p_i^j + \varepsilon_0^j,$$

$$j = 0, \dots, 4, i = 0, \dots, N.$$

Теперь чтобы построить траекторию во времени необходимо определить зависимость параметра сплайна  $u$  от времени. В тривиальном случае имеем формулу

$$u_i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i},$$

$t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Таким образом, мы можем построить кандидата в желаемые траектории в виде  $\hat{P}_i(u_i)$ ,  $u_i \in [0, 1]$  при этом гарантируется монотонность функции  $u_i(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

# Визуализация сырых данных

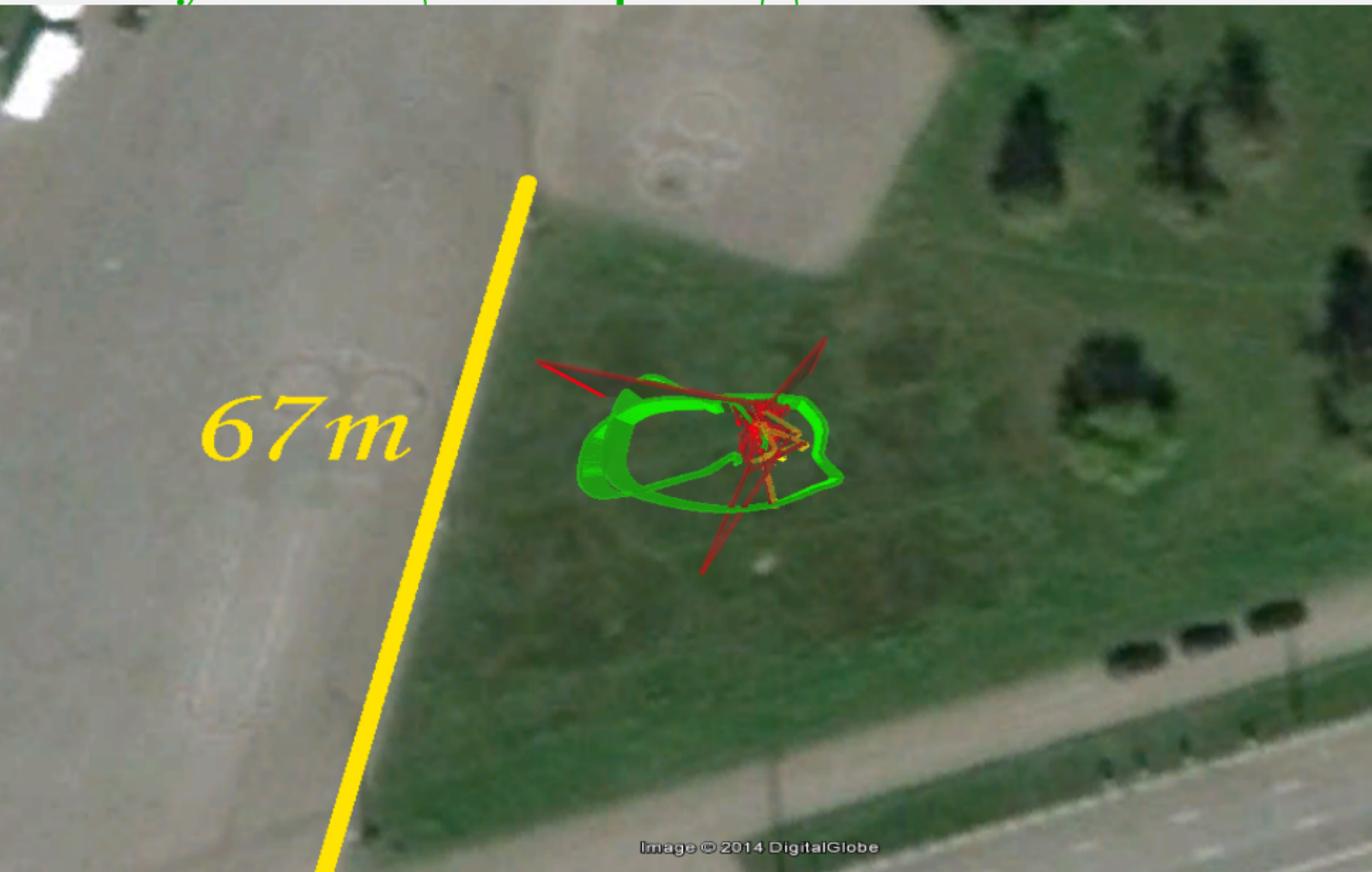
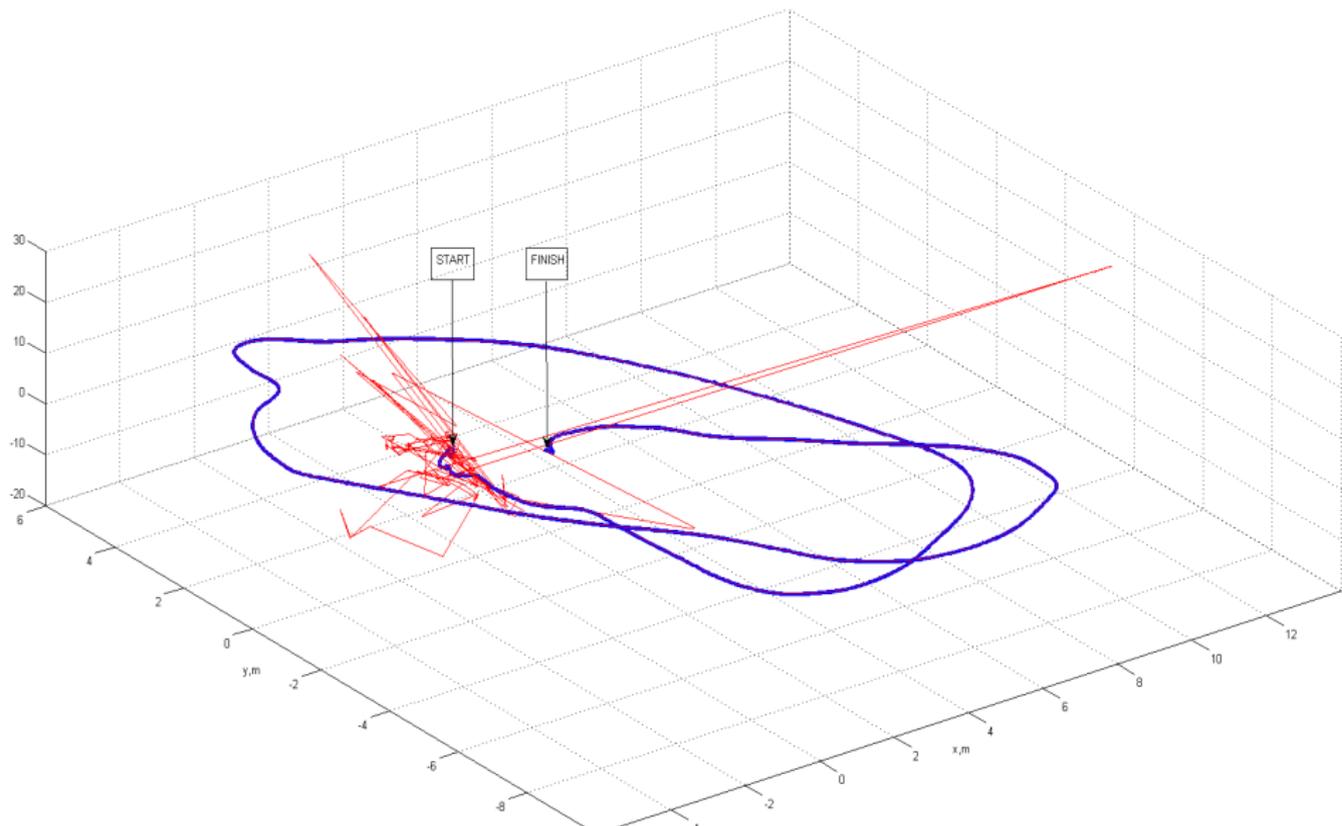


Image © 2014 DigitalGlobe



# Траектория полета, 50Гц



# Дополнительные ограничения на желаемую траекторию

Пусть ускорение ограничено, т.ч.

$$\|(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))^T\|_2 \leq a_{\max}.$$

Пусть скорость ограничена, т.ч.

$$\|(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^T\|_2 \leq v_{\max}.$$

Т.о. чтобы построить допустимую траекторию мы должны решить нелинейную оптимизационную задачу. Эта тяжелая вычислительная задача для произвольных траекторий, однако она существенно упрощается, если использовать  $B^5$  - сплайны и регуляризующий параметр  $\delta$ . Основная идея, заключается в сведении общей задачи оптимизации к решению LMI для параметров  $(\varepsilon, \delta)$ .

# Аппроксимация скоростей и ускорений

Аппроксимация скорости в точке  $\hat{p}_i$

$$\hat{v} = A_v(p + \varepsilon) \in \mathcal{R}^{n-1},$$

где  $A_v = C_1/\Delta_t|_{\Delta_t=1} \doteq A_1 \in \mathcal{R}^{(n-1) \times n}$ ,  $C_1$ -ленточная матрица из элементов первой строки матрицы  $M_2$

Аппроксимация скорости в точке  $\hat{p}_{i+1/2}$

$$\bar{v} = A_{\bar{v}}(p + \varepsilon) \in \mathcal{R}^{(n-3)},$$

$$\text{где } A_{\bar{v}} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} = A_3 \in \mathcal{R}^{(n-3) \times n};$$

Аппроксимация ускорения в точке  $\hat{p}_i$

$$a = A_a(p + \varepsilon) \in \mathcal{R}^{(n-2)},$$

где  $A_a = C_2/\Delta_t^2|_{\Delta_t=1} \doteq A_2 \in \mathcal{R}^{(n-2) \times n}$ ,  $C_2$ -ленточная матрица из элементов первой строки матрицы  $M_3$

# Теорема

Пусть  $B_v = (v_{max}, \dots, v_{max}) = B_1 \in R^{n-1}$ ,

$B_{\bar{v}} = (v_{max}, \dots, v_{max}) = B_3 \in R^{n-3}$ ,

$B_a = (a_{max}, \dots, a_{max}) = B_2 \in R^{n-2}$ ;

Пусть  $\tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_{n-3})$ , где  $\delta_i = \min\{\tilde{\delta}_i^1, \tilde{\delta}_i^2, \tilde{\delta}_i^3\}$  решение LMI для каждого  $k = 1, 2, 3$

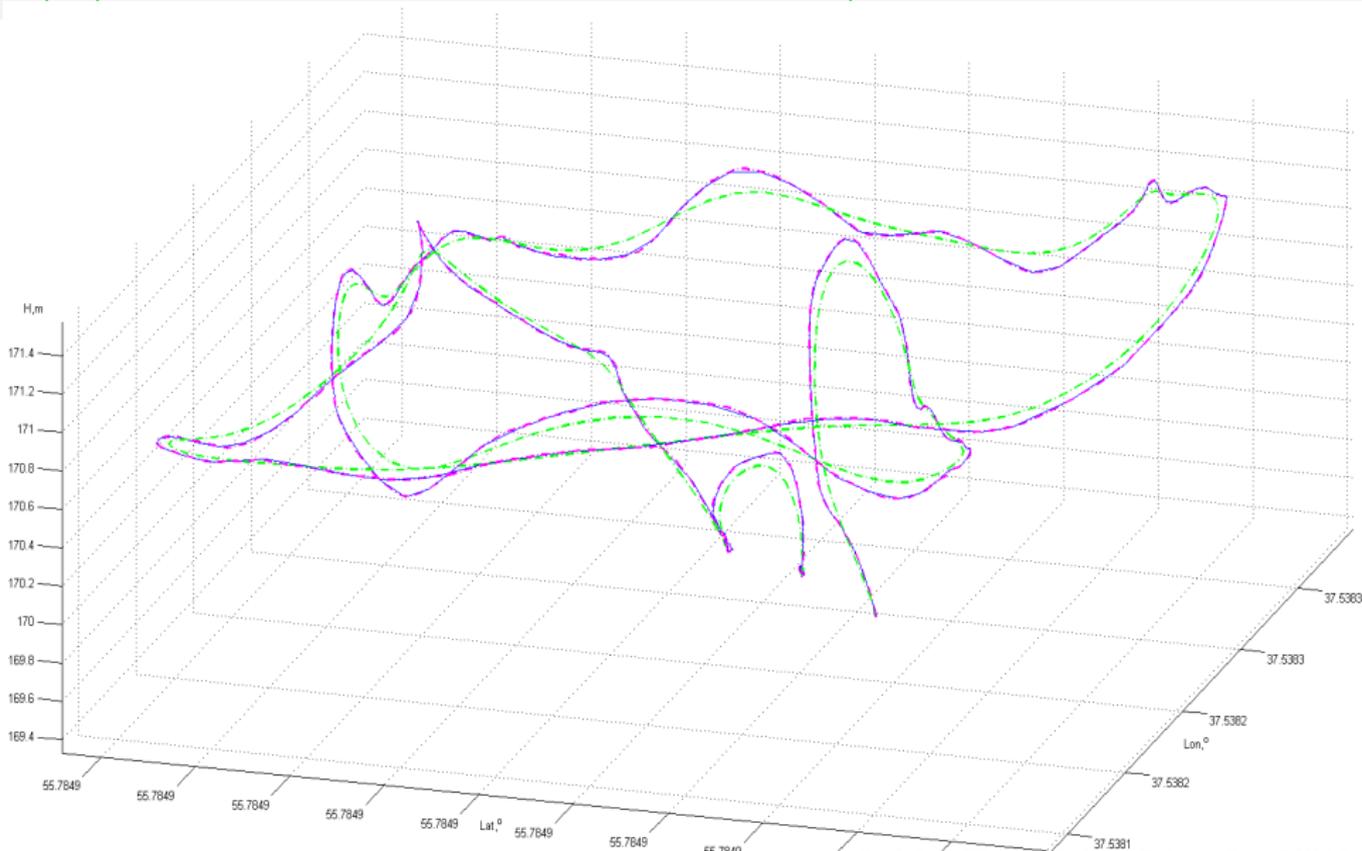
$$\begin{aligned}\delta^k(p - A_k^{-1}B_k) &\leq +D^{-1}HA_k^{-1}B_k, \\ \delta^k(p + A_k^{-1}B_k) &\geq -D^{-1}HA_k^{-1}B_k.\end{aligned}$$

Тогда новое множество точек

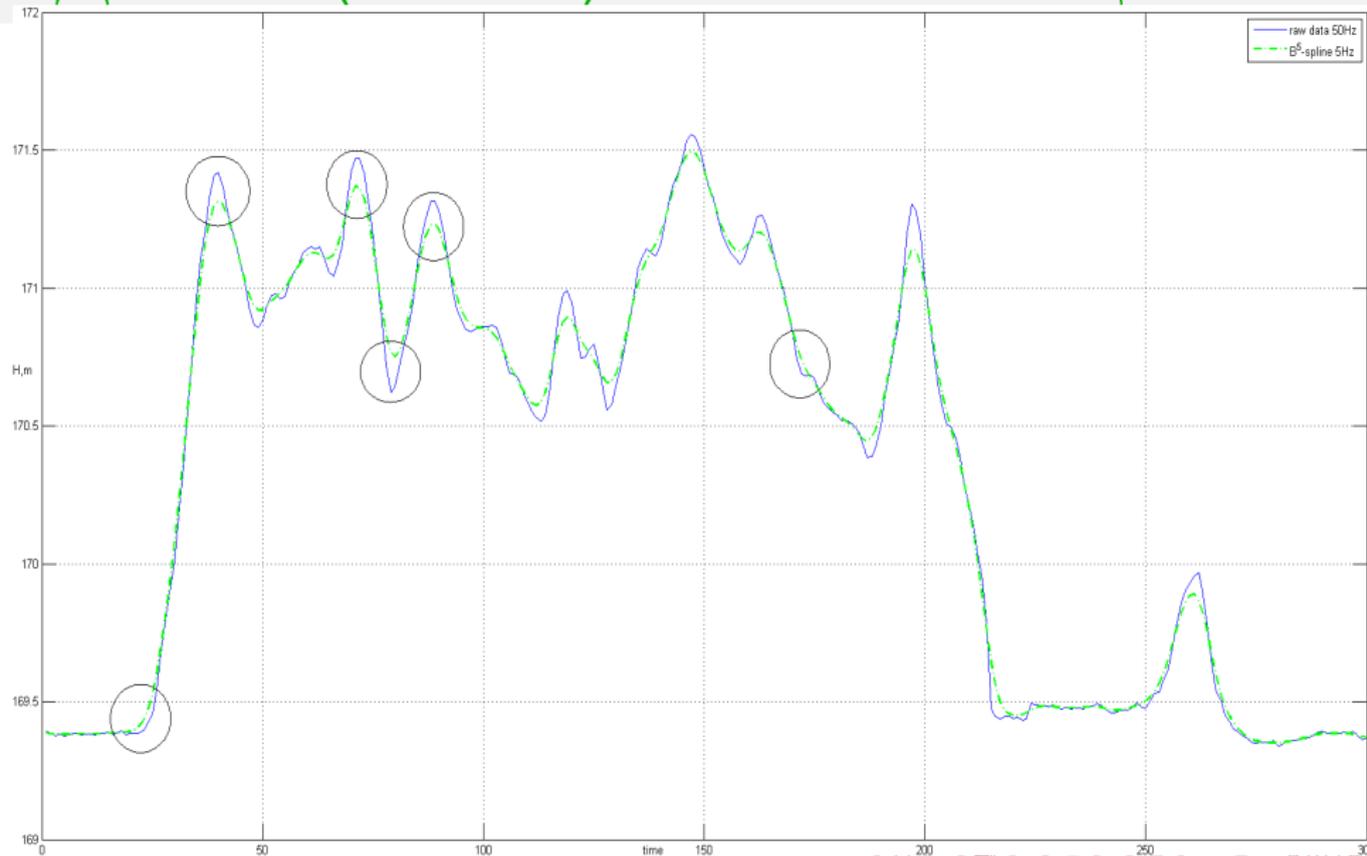
$$\tilde{p}_i^j = p_i^j + \tilde{\varepsilon}_0^j,$$

$j = 0, \dots, 4, i = 0, \dots, N$ , где  $\tilde{\varepsilon} = -(H + D\tilde{\delta})^{-1}Hp$  определяет допустимую траекторию  $P_i^{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta}}(f_i^s(t))^j, i = 0, \dots, N$ , где  $j = 1, \dots, 4$ ,  $f_i^s(t) = q_i^s t, q_i = 1/(t_{i+s} - t_i), k=1,2,3$ .

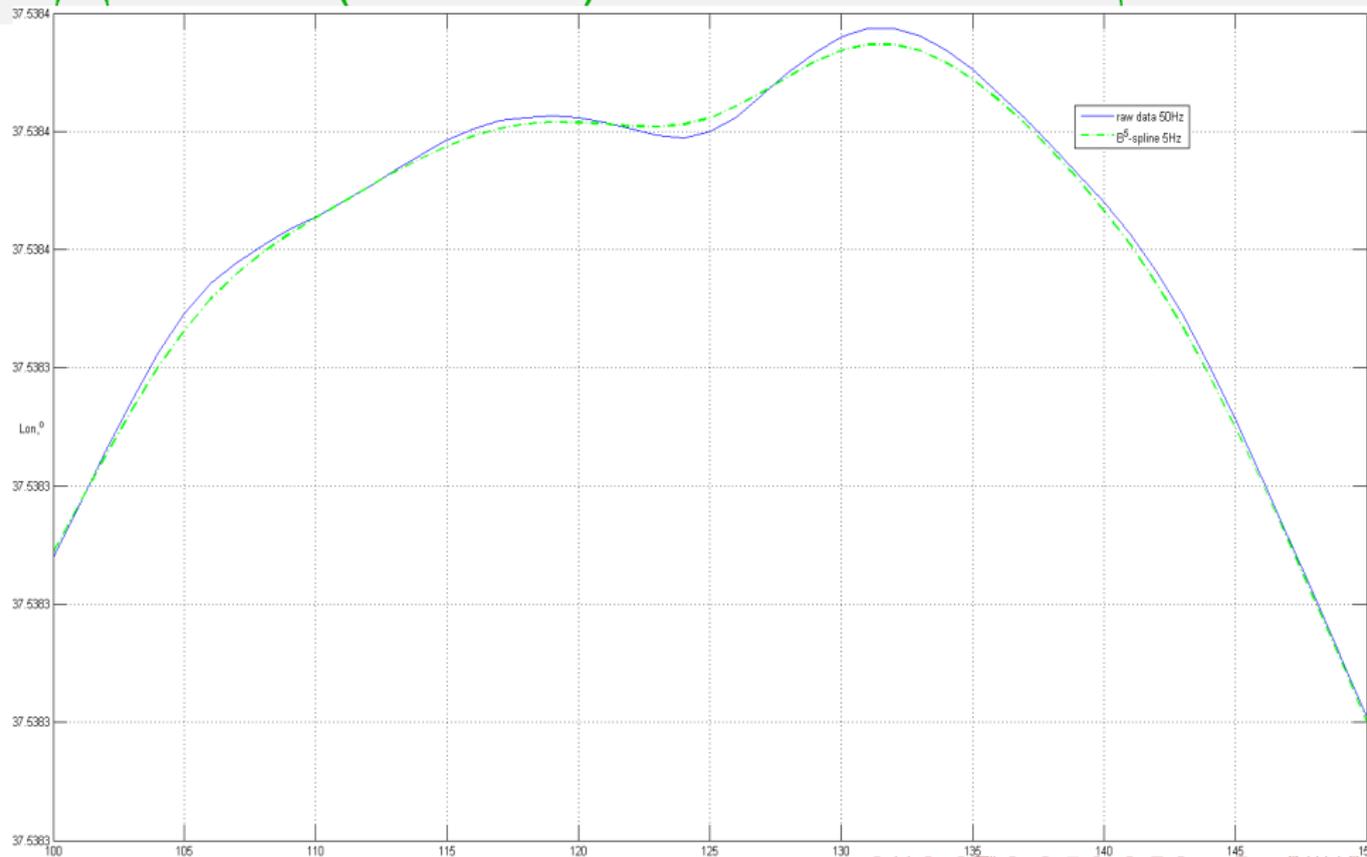
# Данные с частотой 50 Гц



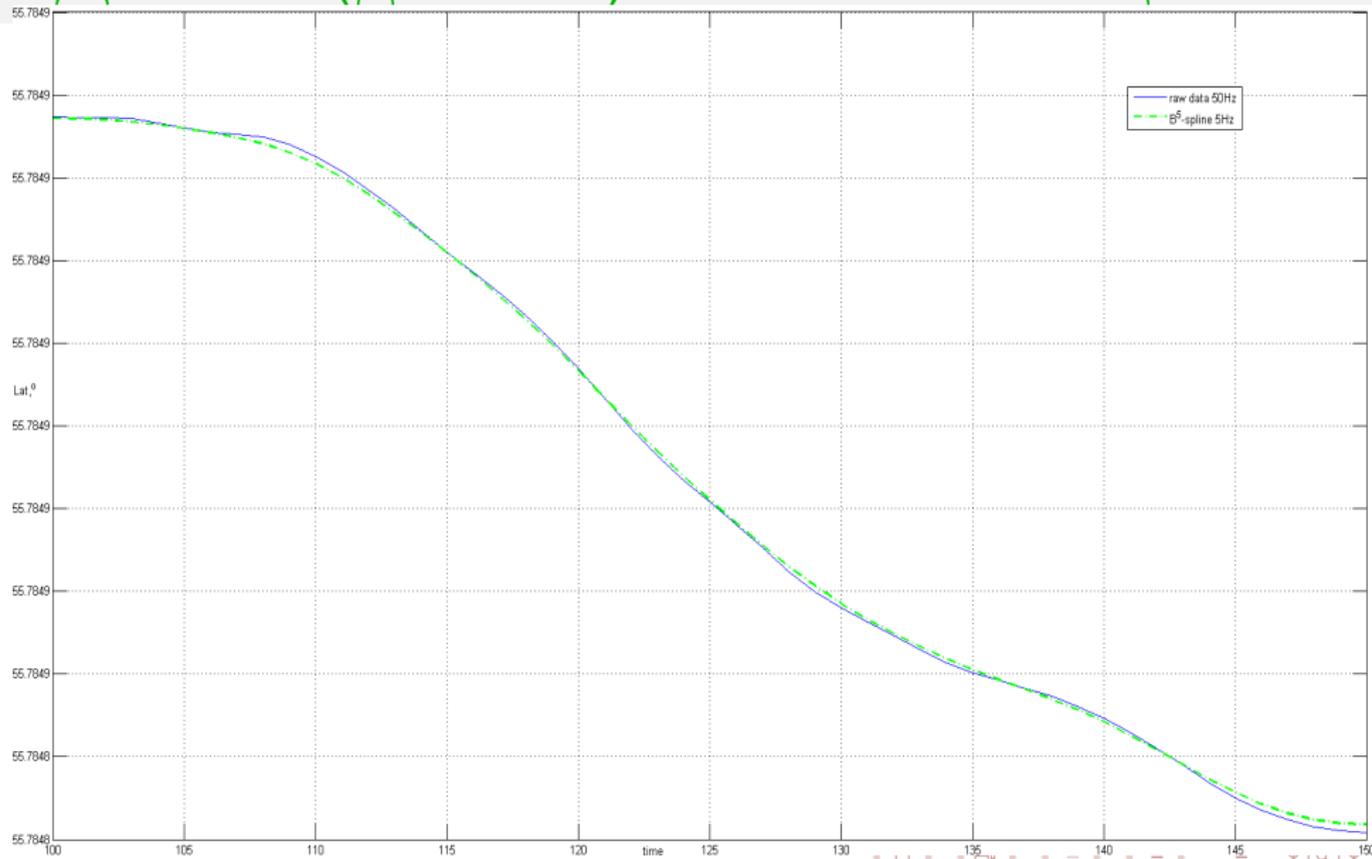
# Данные (высота) с частотой 5 Гц



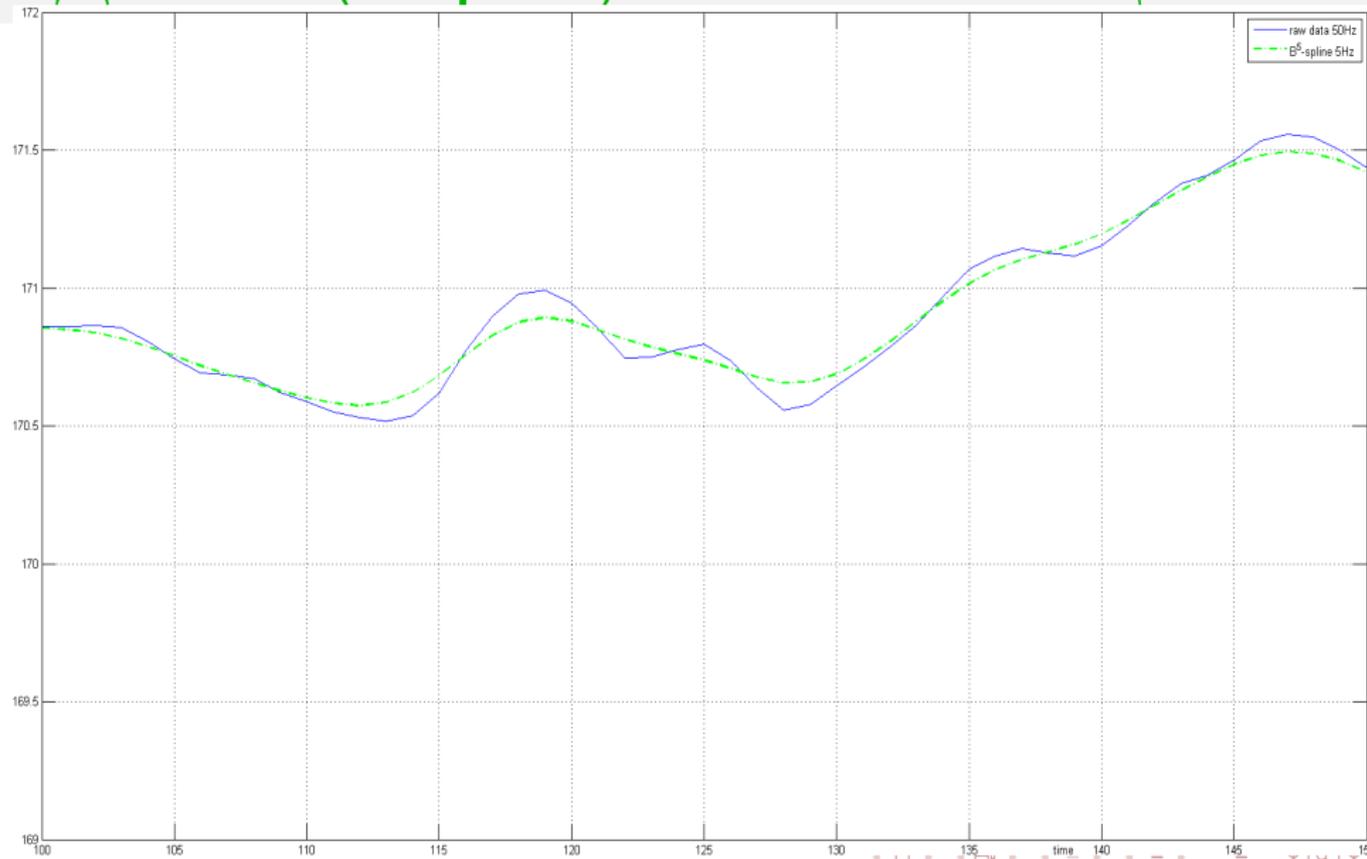
# Данные (высота) с частотой 5 Гц



# Данные (долгота) с частотой 5 Гц



# Данные (широта) с частотой 5 Гц



# Планирование траектории полета

- Сбор данных и геодезическая привязка реперных точек;
- Построение выпуклого множества по данным точкам;
- Наложение геодезической сетки на выпуклое множество;
- Генерация заданного числа точек на геодезической сетке;
- Построение ломанной по этим точкам;
- Сглаживание ломанной с помощью  $B^5$ -сплайнов;

# Планирование траектории: точки



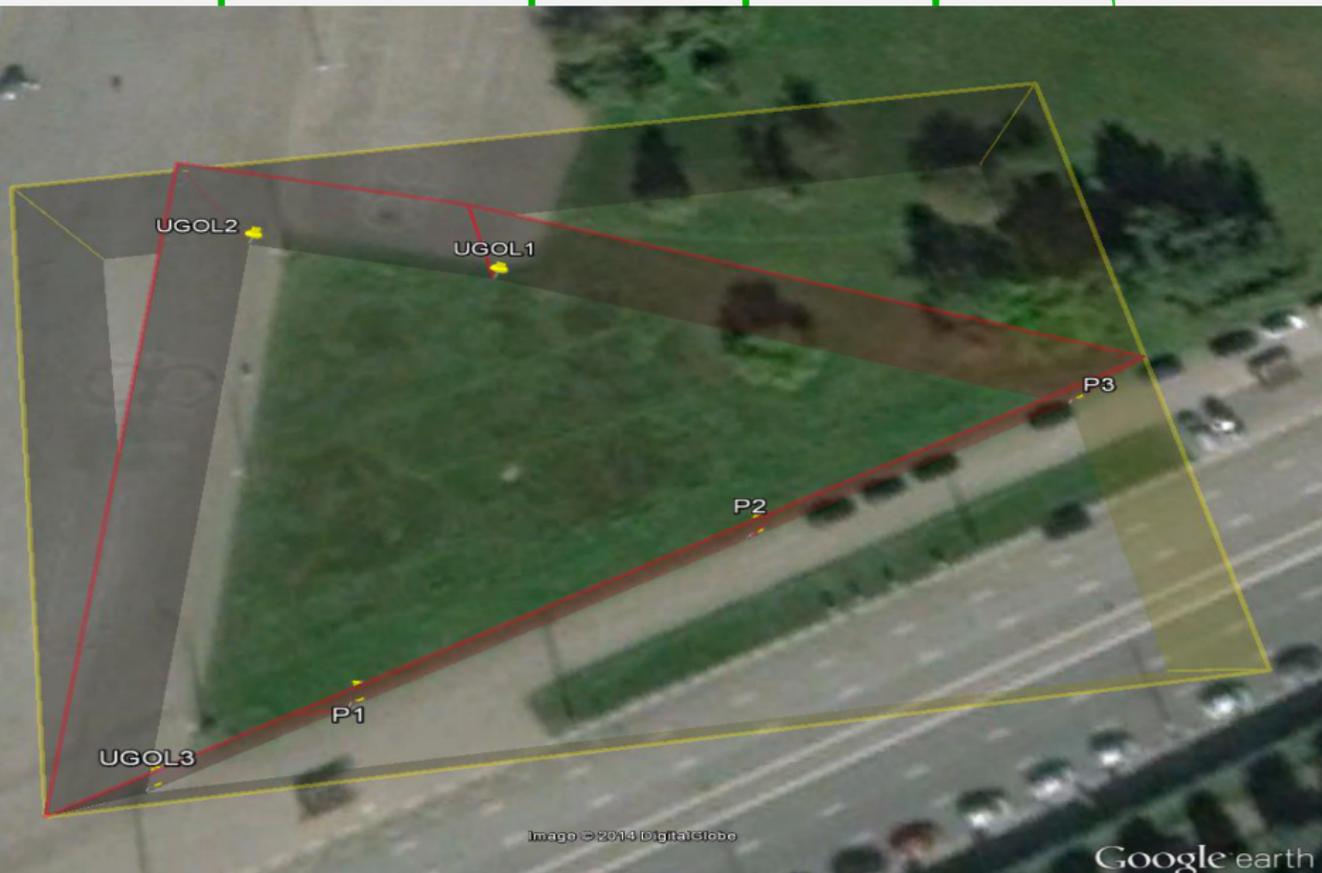
# Планирование траектории: выпуклость



Image © 2014 DigitalGlobe

Google earth

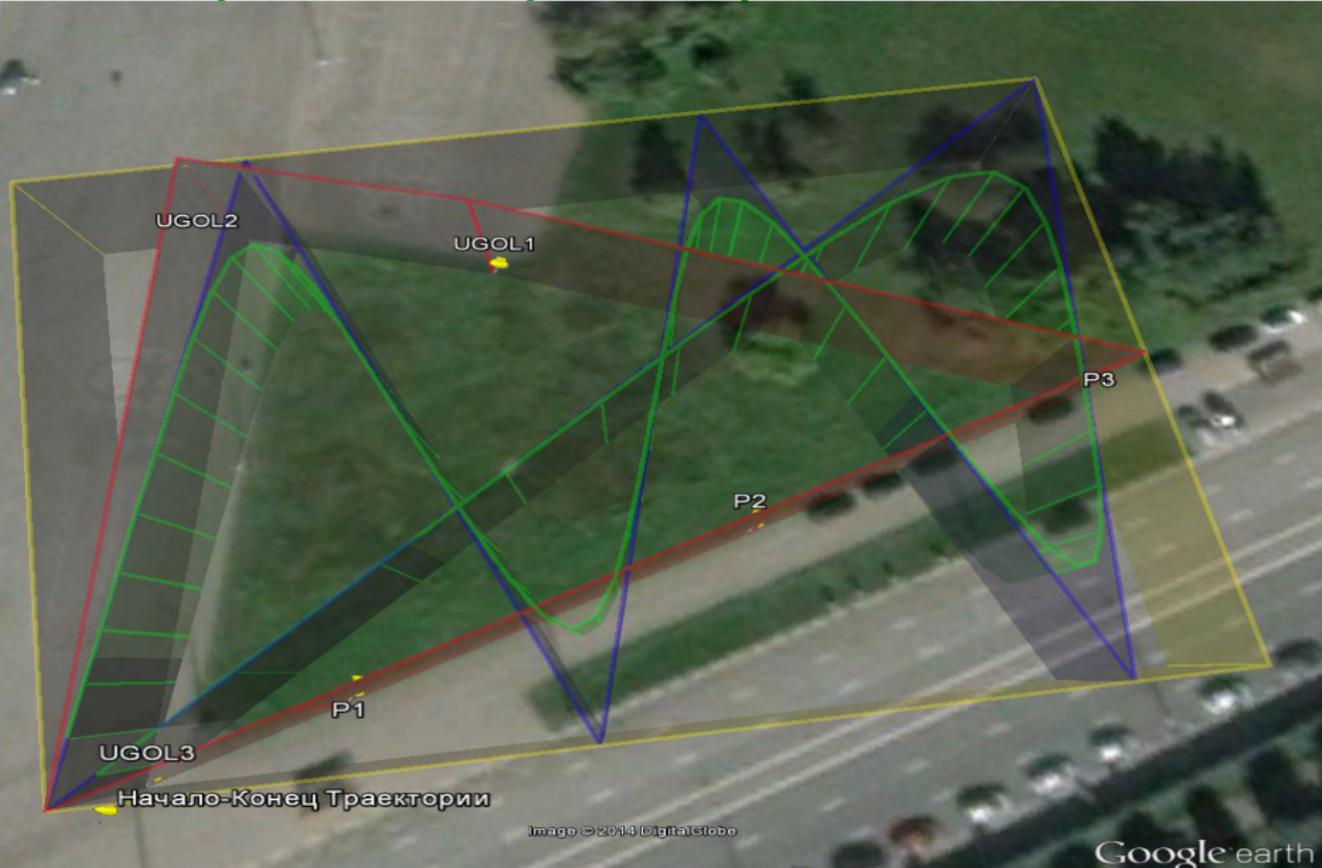
# Планирование траектории: граница



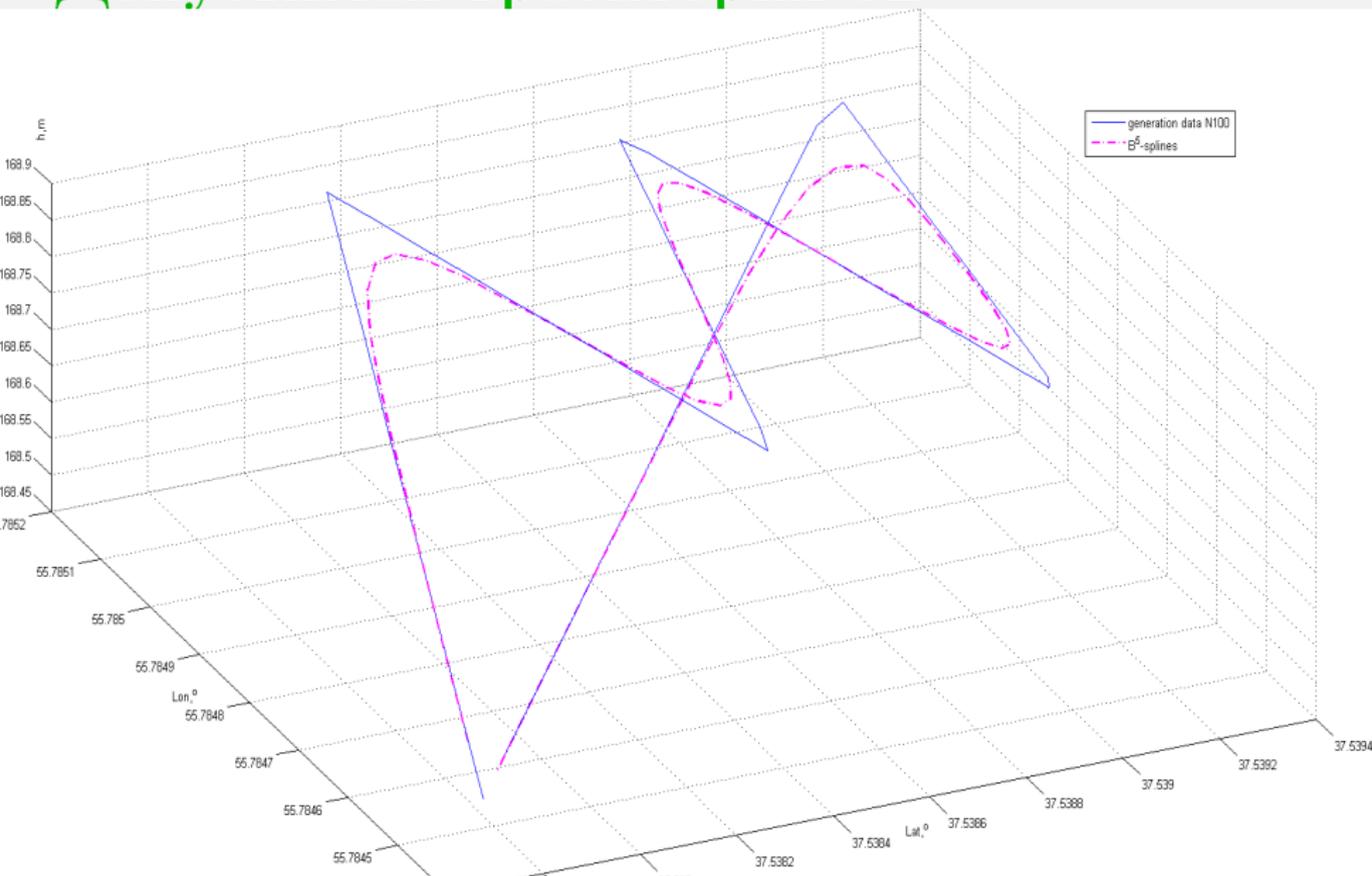
# Планирование траектории: ломаная



# Планирование траектории: $B^5$ -сплайны



# Допустимая траектория 3D



# Выводы

- Предложен метод построения допустимой траектории полета для мультикоптера по имеющемуся набору точек с помощью  $B^5$ -сплайнов;
- Предложен алгоритм генерации допустимых траекторий полета для мультикоптера по имеющемуся ограниченному набору реперных точек с помощью  $B^5$ -сплайнов;
- Проведено численное моделирование на реальных данных с помощью  $B^5$ -сплайнов;

Спасибо за внимание!