Семинар "Квантовая физика и квантовая информация"

О двух методах распутывания операторных экспонент и их применениях

Тлячев Т.В.*

*Кафедра квантовой статистики и теории поля, физический факультет МГУ им М.В. Ломоносова

Москва, МФТИ, 11 Ноября 2014, 11:00

Содержание доклада

1. Канонические преобразования
2. Нормально упорядоченная форма оператора эволюции
3. Метод Вея-Нормана
4. Пример 1: Двухмодовое сжатое состояние
5. Пример 2: Генерация 3х модового перепутанного (сцепленного) состояния в нелинейном оптическом процессе

Определения и обозначения

$(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ – билинейная форма в $\mathbb{C}^n$.
$\overline{z} \in \mathbb{C}$ обозначает комплексное сопряжение
"$*$" – эрмитово сопряжение.
Рассматривается гильбертово пространство $\mathcal{H} = \otimes_1^n \ell_2$ со скалярным полуторалинейным произведением

$$\langle \lambda f, \mu g \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\lambda}_k \mu_k \langle f_k, g_k \rangle_{\ell_2},$$

$$f = \{f_k\}_1^n, \; g = \{g_n\}_1^n \in \mathcal{H}, \quad f_k, \, g_k \in \ell_2, \quad \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C}.$$

Столбцы бозонных операторов рождения и уничтожения $a^\dagger = (a_1^\dagger, \, \ldots \, , a_n^\dagger)^T$, $a = (a_1, \, \ldots \, , a_n)^T$ со стандартными ККС $[a_i, a_j] = 0$.

Квадратичные системы преобразования

$$H = \frac{i}{2}(a^\dagger, Aa^\dagger) + (a^\dagger, Ba) - \frac{i}{2}(a, \overline{A}a) + i(a^\dagger, h) - i(a, \overline{h}), \qquad (1)$$

$$A = A^T, \quad B = B^*, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, [a_i, a_j] = 0.$$

Боголюбов Н.Н. *К теории сверхтекучести.* Известия АН СССР. 1947.

Когерентные состояния и функции Грина:

Малкин И. Ф., Манько В.И. *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем* – М.: Наука, 1979.

Додонов В.В., Манько В.И. *Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем*. Труды ФИАН. 1987. – Т. 183.

Гауссовы состояния:

Холево А. С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* – М. Наука, 1980.

Холево А.С. *Квантовые системы, каналы, информация.* М.: МЦНМО, 2010.

Канонические преобразования

Квантово-оптический смысл гамильтониана (1):
Матрица A – параметрические преобразования частоты вниз $\omega_p = \omega_i + \omega_j$, B – процессы смешения частот $\omega_i = \omega_p + \omega_j$.
Унитарный оператор $U_t = e^{-\imath Ht/\hbar}$ генерирует канонические преобразования (КП)

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} = U_t^* \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} U_t = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_t \\ \overline{h}_t \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$\Phi|_{t=0} = I, \quad \Psi|_{t=0} = 0, \quad h_0 = 0.$$

Friedrichs, K. O. *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*. New York: Wiley (Interscience), 1953.
Березин, Ф. А. *Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965*
Второе издание: М.: Наука, 1986

Гамильтониан (1) и КП можно определить матрицей

$$G \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} -\imath B & A \\ \overline{A} & \imath \overline{B} \end{pmatrix}, \quad e^{Gt} = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В этом случае канонические преобразования примут вид

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a_t^\dagger \end{pmatrix} = U_t^* \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} U_t = e^{Gt} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \frac{e^{Gt} - I}{G} \begin{pmatrix} h \\ \overline{h} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрица $S_t = e^{Gt}$ является симплектической:

$$S_t^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} S_t = \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_t & \Psi_t \\ \overline{\Psi}_t & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Примеры КП:

1. $B = 0$, тогда U_t является многомодовым оператором сжатия
$$U_t = S_{A,t} \equiv e^{-\frac{t}{2}((a^\dagger, Aa^\dagger)-(a,\overline{A}a))}. \tag{5}$$
КП выражаются через полярное разложение матрицы $A = U_A\,|A|$:
$$\Phi_t = U_A \cosh|A|t\, U_A^* = \Phi_t^*, \quad \Psi_t = U_A \sinh|A|t = \Psi_t^T.$$
Композиция операторов сжатия $U_{A_2 A_1} = S_{A_2} S_{A_1}$ порождает новые матрицы канонических преобразований
$$\Phi = \Phi_1\Phi_2 + \Psi_1\overline{\Psi}_2, \quad \Psi = \Phi_1\Psi_2 + \Psi_1\overline{\Phi}_2,$$
но при этом не является сжатием в смысле (5).
2. $A = 0$
$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} \Phi_t & 0 \\ 0 & \overline{\Phi}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-itB} & 0 \\ 0 & e^{it\overline{B}} \end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица

Квадратурные компоненты $\widehat{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$, $\widehat{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}}$.
Ковариационная матрица:

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\langle\{Q_i, Q_j\}\rangle - \langle Q_i\rangle\langle Q_j\rangle,$$

где $Q = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n, \widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \ldots \widehat{p}_n)^T$.
Неравенство Робертсона-Шредингера

$$V + \frac{i}{2}J \geq 0, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Начальное когерентное состояние $|\psi_i\rangle = \bigotimes_{i=1}^{n} e^{\alpha_i a_i^\dagger - \overline{\alpha}_i a_i}|0\rangle_i$

$$V(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\Phi_t + \overline{\Psi}_t)(\Phi_t^* + \Psi_t^T) & i[(\Phi_t + \overline{\Psi}_t)(\Phi_t^* - \Psi_t^T) - I] \\ i[(\overline{\Psi}_t - \Phi_t)(\Psi_t^T + \Phi_t^*) + I] & (\overline{\Psi}_t - \Phi_t)(\Psi_t^T - \Phi_t^*) \end{pmatrix}.$$

Нормально упорядоченная форма оператора U_t:

$$e^{s_t} e^{-\frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger)-(a^\dagger, f_t)} : e^{(a^\dagger, ((\Phi_t^*)^{-1}-I)a)} : e^{-\frac{1}{2}(a, \overline{\rho}_t a)+(a, \overline{g}_t)},$$

$$R_t = \Phi_t^{-1}\Psi_t, \quad \rho_t = \Psi_t \overline{\Phi_t}^{-1}, \quad f_t = h_t - \rho_t \overline{h}_t, \quad g_t = \Phi_t^{-1} h_t,$$

$$s_t = -\int_0^t \left(\frac{1}{2} \left\{ \mathrm{Tr}\ \overline{\rho}_\tau A + (\overline{f}_\tau, A\overline{f}_\tau) \right\} + (\overline{f}_\tau, h) \right) d\tau.$$

Chebotarev A.M., Tlyachev T.V. Mathematical Notes, 2014, V. 95, No. 5, 721–737.
Если $A = 0$, $h = 0$ тогда $s_t = 1/\sqrt{\det \Phi_A}$.
Определим "обобщенное"сжатое состояние

$$|A, B, h\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-i\mathcal{H}t}|0\rangle = U_t|0\rangle.$$

Тогда $|A, B, h\rangle = e^{s_t} e^{\frac{1}{2}(a^\dagger, R_t a^\dagger)-(a^\dagger, f_t)}|0\rangle$.

Диагонализация Такаги

Для симметричных матриц R справедливо разложение Такаги

$$R = U_R \Lambda U_R^T, \quad U_R = U(U^* \overline{V})^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

где $\Lambda \geq 0$—диагональная матрица, а U и V унитарные матрицы:

$$R = U \Lambda V^*. \tag{7}$$

R. A. Horn, C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1985.
Существует эрмитова матрица L такая, что

$$U_R = e^{iL},\ L = L^*, \quad U_R^T a^\dagger = e^{i\overline{L}} a^\dagger = e^{i(a^\dagger, La)} a^\dagger e^{-i(a^\dagger, La)},$$

тогда

$$(a^\dagger, Ra^\dagger) = e^{i(a^\dagger, La)}(a^\dagger, \Lambda a^\dagger) e^{-i(a^\dagger, La)}, \quad (a, \overline{R}a) = e^{i(a^\dagger, La)}(a, \Lambda a) e^{-i(a^\dagger, La)},$$

$$e^{-i(a^\dagger, La)} e^{\frac{1}{2}(a, \overline{R}a) - \frac{1}{2}(a^\dagger, Ra^\dagger)} e^{i(a^\dagger, La)} = \prod_{n=1}^{N} e^{\frac{1}{2}(a_n^2 - (a_n^\dagger)^2)\Lambda_n},$$

где $L = -i \ln[U(U^* \overline{V})^{\frac{1}{2}}]$ эрмитова, Λ_n ее спектр.

Метод Вея-Нормана

Рассмотрим оператор $H(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) h_i$,
где $\alpha_i(t)$ скалярные функции от $t \in \mathbb{R}$.
Предположение: система операторов $\{h_i\}_{k=1}^{m}$ может быть расширена до алгебры Ли $\mathfrak{L}$, $dim\mathfrak{L} = n$. Тогда в окрестности $t = 0$ справедливо

$$e^{H(t)} = \exp(g_1(t)h_1)\dots\exp(g_n(t)h_n)$$

где

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ & & \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}, \quad g(0) = 0. \tag{8}$$

$$\frac{dg}{dt} = \xi^{-1}(g)\alpha.$$

Wei J., Norman E., J. Math. Phys., ***4****, 1963.*

Метод Вея-Нормана

Глобальное решение существует, если алгебра $\mathfrak{L}$ разрешима, т.е. существует конечная убывающая цепочка идеалов $\{\mathfrak{L}_\mathfrak{i}\}_{0\leq i\leq n}$ алгебры таких, что

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{o},\ \mathfrak{L}_\mathfrak{n} = \{0\},\ [\mathfrak{L}_\mathfrak{i}, \mathfrak{L}_\mathfrak{i}] \subset \mathfrak{L}_{\mathfrak{i}+1}.$$

Wei J., Norman E., *On global representations of the solutions of linear differential equations as a product of exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 327-334.

Оператор двухмодового сжатия

$S_2 = e^{-iH_2 t} \stackrel{\text{def}}{=} e^{t(a_1 a_2 e^{-2i\phi} - a_1^\dagger a_2^\dagger e^{2i\phi})}$, где $H_2 = -i(a_1 a_2 e^{-2i\phi} - a_1^\dagger a_2^\dagger e^{2i\phi})$.

Применение метода Вея-Нормана

h_i генераторы алгебры $\mathfrak{su}(1,1)$:

$$h_1 = a_1^\dagger a_2^\dagger,\ h_2 = a_1 a_2,\ h_3 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1),$$
$$[h_3, h_{1,2}] = \pm h_{1,2}, \quad [h_1, h_2] = -2h_3.$$

Тогда

$$S_2 = e^{t(e^{-2i\phi} h_2 - e^{2i\phi} h_1)} = e^{g_1(t)h_1} e^{g_2(t)h_2} e^{g_3(t)h_3}. \tag{9}$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений на g_i:

$$\begin{gathered} \dot{g}_1 - g_1 \dot{g}_3 + g_1^2 \dot{g}_2 e^{-g_3} = -e^{2i\phi}, \\ \dot{g}_3 - 2g_1 \dot{g}_2 e^{-g_3} = 0, \quad \dot{g}_2 e^{-g_3} = e^{-2i\phi}. \end{gathered} \tag{10}$$

Shumaker B. L., Caves C. M., Phys. Rev. A, **31**, 1985.

Нормальное упорядочивание с помощью КП

Ненулевые элементы матрицы A: $A_{12} = A_{21}$, матрица $B = 0$. Канонические преобразования равны

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 \\ 0 & \cosh t \end{pmatrix}, \; \Psi_t = e^{2i\phi} \begin{pmatrix} 0 & \sinh t \\ \sinh t & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_t = \Phi_A^{-1}\Psi_A = e^{2i\phi} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{th}\, t \\ \mathrm{th}\, t & 0 \end{pmatrix}, \; s_t = 1/\sqrt{\det \Phi_t} = (\cosh t)^{-1}.$$

Таким образом

$$S_2 = (\cosh t)^{-1} e^{-a_1^\dagger a_2^\dagger e^{2i\phi} \mathrm{th}\, t} : e^{(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)((\cosh t)^{-1} - 1)} : e^{a_1 a_2 e^{-2i\phi} \mathrm{th}\, t}.$$

Генерация 3х модового перепутанного состояния

Рассмотрим процессы генерации третей гармоники

$$\omega_p = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 + \omega_p = \omega_3.$$

Накачка ω_p считается классической. Гамильтониан взаимодействия

$$H_3 = i[\beta_1(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2) + \beta_2(a_1 a_3^\dagger - a_1^\dagger a_3)].$$

Чиркин А.С., Родионов А.В., Письма в ЖЭТФ., **79**, 2004, с. 311-314
Канонические преобразования равны

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} \\ 0 & M_{22} & 0 \\ M_{31} & 0 & M_{33} \end{pmatrix}, \quad \Psi_t = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & 0 \\ M_{21} & 0 & M_{23} \\ 0 & M_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_{11}(t)=\frac{(\beta_1^2-\gamma^2)C(t)+\beta_2^2}{\Gamma^2},\quad M_{12}(t)=\frac{\beta_2\gamma(1-C(t))}{\Gamma^2}-\frac{\beta_1 S(t)}{\Gamma},\quad M_{13}(t)=\frac{\beta_1\beta_2(C(t)-1)}{\Gamma^2}+\frac{\gamma S(t)}{\Gamma},$$

$$M_{21}(t)=\frac{\beta_2\gamma(C(t)-1)}{\Gamma^2}-\frac{\beta_1 S(t)}{\Gamma},\quad M_{22}(t)=\frac{(\beta_1^2+\beta_2^2)C(t)-\gamma^2}{\Gamma^2},\quad M_{23}(t)=\frac{\beta_1\gamma(1-C(t))}{\Gamma^2}-\frac{\beta_2 S(t)}{\Gamma},$$

$$M_{31}(t)=\frac{\beta_1\beta_2(C(t)-1)}{\Gamma^2}-\frac{\gamma S(t)}{\Gamma},\quad M_{32}(t)=\frac{\beta_1\gamma(C(t)-1)}{\Gamma^2}-\frac{\beta_2 S(t)}{\Gamma},\quad M_{33}(t)=\frac{(\beta_2^2-\gamma^2)C(t)+\beta_1^2}{\Gamma^2},$$

где $\Gamma=\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2-\gamma^2}\geq 0,\quad C(t)=\cosh(\Gamma t),\quad S(t)=\sinh(\Gamma t).$
Из симплектичности КП следует

$$\cosh^2\delta_1(t)=\frac{M_{22}^2}{1+M_{32}^2},\quad \sinh^2\delta_1(t)=\frac{M_{12}^2}{1+M_{32}^2},\quad \sinh^2\delta_2(t)=M_{32}^2.$$

Тогда в случае начального вакуумного состояния, волновая функция $|\psi(t)\rangle\stackrel{\mathrm{def}}{=}e^{-iHt}|0\rangle$ равна

$$|\psi(t)\rangle=(\cosh\delta_1\cosh\delta_2)^{-1}\sum_{m,n}(\operatorname{th}\delta_1)^m\left(\frac{-\operatorname{th}\delta_2}{\cosh\delta_1}\right)^n\sqrt{C_{m+n}^m}|m\rangle_1|m+n\rangle_2|n\rangle_3.$$

Рассмотрим алгебру:

$$h_1 = a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2, \quad h_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}(a_2 a_3 - a_2^\dagger a_3^\dagger), \quad h_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2}(a_1 a_3^\dagger - a_1^\dagger a_3),$$

$$[h_1, h_2] = h_3, \quad [h_2, h_3] = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 h_1, \quad [h_3, h_1] = -h_2$$

Представим U_t в виде

$$U_t = e^{-iHt} = e^{\alpha_1(t)h_1} e^{\alpha_2(t)h_2} e^{\alpha_3(t)h_3},$$

Уравнения на $\alpha_i(t)$ имеют вид

$$\alpha_1' - \frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_3' \sinh\left(\alpha_2 \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) = 1, \quad \alpha_2' \cosh(\alpha_1) + \alpha_3' \cosh\left(\alpha_2 \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \sinh\left(\alpha_2 \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) = 0,$$

$$\alpha_2' \sinh(\alpha_1) + \alpha_3' \cosh\left(\alpha_2 \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \sinh\left(\alpha_2 \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) = 1.$$

Решение:$\alpha(t) = arctanh \frac{\theta \sinh \theta t}{\cosh \theta t - \epsilon^2}$, $\alpha_2 = \epsilon^{-1} arsh \epsilon \theta^{-2}(1 - \cosh \theta t)$

$$\alpha_3(t) = \int_0^t \frac{\cosh \alpha_1(x)}{\cosh \epsilon \alpha_2(x)} dx, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2}.$$

Спасибо за внимание!