

Теоремы о гомотопической инвариантности и эталном вырезании для предпучков с *Witt*-трансферами

Дружинин А.Э.

10 ноября 2014 г.

Definition (Wor_k)

- $Ob\ Wor_k = Ob\ Sm_k$ (аффинные многообразия над полем k);
- $Wor_k(X, Y) = W(P(X, Y), *)$ — группа Витта точной категории с двойственностью (Определения ?? и ??.)
- композиция морфизмов $\Phi \in Wor_k(X, Y)$ и $\Psi \in Wor_k(Y, Z)$ определяется как тензорное произведение над $k[Y]$ соответствующих квадратичных пространств;
- тождественный морфизм определяется диагональю, т.е. модулем ${}_{k[X]}k[X]_{{}_{k[X]}}$ и каноническим изоморфизмом $k[X] \simeq Hom_{{}_{k[X]}}(k[X], k[X])$.

Definition ($P(X, Y)$)

$P(X, Y)$ — категория конечнопорожденных $k[X \times Y]$ -модулей, которые конечнопорождены и проективны как $k[X]$ -модули. $*$ — двойственность на $P(X, Y)$, такая что $P^* = Hom_{{}_{k[X]}}(P, k[X])$.

Типичный пример морфизма из X в Y — это квадратичное пространство $({}_{k[Y]}P_{{}_{k[X]}}, \phi)$, где ${}_{k[Y]}P_{{}_{k[X]}}$ — $k[Y \times X]$ -модуль, конечнопорождённый как $k[X]$ -модуль, и где $\phi : {}_{k[Y]}P_{{}_{k[X]}} \rightarrow Hom_{{}_{k[X]}}(P, k[X])$ — симметрический изоморфизм $k[Y \times X]$ -модулей.

Предпучки с *Witt*-трансферами

Определён функтор $i: Sm \rightarrow Wor$, сопоставляющий морфизму $f: X \rightarrow Y$ кольцо функций на графике $k[\Gamma_f]$, как модуль над $k[X \times Y]$ с единичной квадратичной формой над $k[X]$.

Definition

- Предпучком абелевых групп с *Witt*-трансферами называется контравариантный функтор $F: Wor_k \rightarrow Ab$, удовлетворяющий условию аддитивности на дизъюнктных объединениях, т.е. такой, что $\mathcal{F}(X_1 \amalg X_2) = \mathcal{F}(X_1) \oplus \mathcal{F}(X_2)$.
- Пучком Нисневича с *Witt*-трансферами называется такой предпучок F с *Witt*-трансферами, что его ограничение на Sm_k является пучком Нисневича. Т.е. $F \circ i: Sm_k \rightarrow Ab$ — пучок Нисневича. Аналогично определяется пучок Зарисского с *Witt*-трансферами.
- Гомотопически инвариантным предпучком с *Witt*-трансферами называется предпучок F с *Witt*-трансферами, такой что $F(X \times \mathbb{A}^1) \simeq F(X)$ для любого $X \in Sm_k$.

Theorem (*Witt*-трансферы)

Для произвольного предпучка $\mathcal{F}$ с *Witt*-трансферами существует единственная структура предпучка с *Witt*-трансферами на ассоциированном пучке в топологии Нисневича $\mathcal{F}_{Nis}$, такая, что канонический гомоморфизм $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{Nis}$ является гомоморфизмом предпучков с *Witt*-трансферами.

Эта теорема говорит, что категория пучков Нисневича с трансферами абелева.

Theorem (гомотопическая инвариантность)

Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathcal{F}$ с *Witt*-трансферами, ассоциированный пучок в топологии Нисневича $\mathcal{F}_{Nis}$ гомотопически инвариантен

Эта теорема говорит, в частности, что *Witt*-мотив $M^W(Y)$ любого гладкого многообразия Y действительно лежит в категории $DWM(k)$, т.е. является мотивным комплексом.

Theorem (инъективность на аффинной прямой)

Пусть $U \subset V$ — пара вложенных открытых по Зарисскому подмножеств $\mathbb{A}_K^1$. Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с трансферами. Тогда отображение ограничения $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ инъективно

Theorem (вырезание на аффинной прямой)

Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с Witt-трансферами, тогда для поля K , являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия над k , и двух вложенных окрестностей по Зарисскому $U \subset V$ точки z в $\mathbb{A}_K^1$ ограничение

$$i^*: \frac{\mathcal{F}(V - z)}{\mathcal{F}(V)} \rightarrow \frac{\mathcal{F}(U - z)}{\mathcal{F}(U)}$$

является изоморфизмом (i обозначает вложение U в V).

Следствием теорем В и Г является то, что гомотопически инвариантный предпучок $\mathcal{F}$ с Witt-трансферами при ограничении на аффинную прямую становится пучком Зарисского на ней.

Согласно одной теореме об инъективности на локальных схемах, доказанной К. Чепуркиным для гомотопически инвариантного предпучка $\mathcal{F}$ с Witt-трансферами, гладкого аффинного многообразия X и точки $x \in X$ (не обязательно замкнутой) гомоморфизм $\mathcal{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \rightarrow \mathcal{F}(k(X))$ инъективен.

Theorem (эталное вырезание в размерности 1)

Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с Witt-трансферами и $\pi: X' \rightarrow X$ — этальный морфизм гладких кривых над полем K , являющимся полем частных некоторого гладкого аффинного многообразия. Пусть $z \in X$ — замкнутая точка, такая, что $\pi^{-1}(z)$ состоит из одной точки, скажем z' , и индуцированный на полях вычетов этих точек гомоморфизм является изоморфизмом. Тогда π индуцирует изоморфизм $\pi^*: \frac{\mathcal{F}(U-z)}{\mathcal{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{F}(U'-z')}{\mathcal{F}(U')}$, где $U = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$, $U' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X',z'})$.

Следствием теорем В, Г и Д является то, что для гомотопически инвариантного предпучка $\mathcal{F}$ с Witt-трансферами ассоциированный пучок Нисневича $\mathcal{F}_{\text{Nis}}^{\sim}$ обладает следующим свойством: его значение на любом открытом по Зарисскому подмножестве U аффинной прямой равно значению на U исходного предпучка, т.е. $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_{\text{Nis}}^{\sim}(U)$.

Definition (категория Wor_k^{pair})

Объекты категории Wor_k^{pair} – это пары (X_1, X_2) , где X_1 – гладкая схема (или существенно гладкая схема), а X_2 – открытая подсхема.

Для двух пар (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2) морфизмы

$$\begin{aligned} Wor_k^{pair}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \\ &= \operatorname{coker}(Wor_k(X_1, Y_2) \xrightarrow{(-\circ i_X, i_Y \circ -)} Wor_k^{\rightarrow}(X_2 \rightarrow X_1, Y_2 \rightarrow Y_1)), \end{aligned}$$

где i_X и i_Y – вложения $X_2 \hookrightarrow X_1$ и $Y_2 \hookrightarrow Y_1$ соответственно, а $Wor_k^{\rightarrow}$ обозначает категорию диаграмм, т.е.

$$\begin{aligned} Wor_k^{\rightarrow}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \\ &= \ker(Wor_k(X_2, Y_2) \oplus Wor_k(X_1, Y_1) \xrightarrow{(i_Y \circ -, - \circ i_X)} Wor_k(X_2, Y_1)). \end{aligned}$$

Для предпучка с Witt-трансферами $\mathcal{F}$ определён предпучок $\mathcal{F}'$ на категории Wor_k^{pair} , такой что $\mathcal{F}'(X_1, X_2) = \operatorname{coker}(\mathcal{F}(X_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(i_X)} \mathcal{F}(X_2))$, где i_X – вложение $X_2 \hookrightarrow X_1$.

Definition (категория $\overline{Wor_k}$)

- $Ob \overline{Wor_k} = Ob Wor_k$;
- морфизмы

$$\overline{Wor_k}(X, Y) = \text{coker}(Wor_k(\mathbb{A}^1 \times X, Y) \xrightarrow{(-\circ i_0) - (-\circ i_1)} Wor_k(X, Y)),$$

где $i_0, i_1: X \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times X$ — нулевое и единичное сечения $\mathbb{A}^1 \times X$.

Definition (категория $\overline{Wor_k^{pair}}$)

- $Ob \overline{Wor_k^{pair}} = Ob Wor_k^{pair}$;
- морфизмы

$$\begin{aligned} \overline{Wor_k^{pair}}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \\ &= \text{coker}(Wor_k^{pair}((\mathbb{A}^1 \times X_1, \mathbb{A}^1 \times X_2), (Y_1, Y_2)) \rightarrow Wor_k^{pair}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))). \end{aligned}$$

Гомотопически инвариантные предпучки — это в точности те предпучки, которые пропускаются через канонический функтор в факторкатегорию $h: Wor_k \rightarrow \overline{Wor_k}$.

Для гомотопически инвариантного предпучка с *Witt*-трансферами $\mathcal{F}$, предпучок $\mathcal{F}': Wor_k^{pair} \rightarrow Ab$ пропускаются через $h^{pair}: Wor_k^{pair} \rightarrow \overline{Wor_k^{pair}}$.

Лемма (инъективность на аффинной прямой)

Пусть $U \subset V$ — пара вложенных открытых подмножеств $\mathbb{A}_K^1$, а i — вложение U в V , тогда существует морфизм $\Phi \in \text{Wor}(V, U)$, такой, что $[i \circ \Phi] = [id_V]$ в $\overline{\text{Wor}}_K(V, V)$.

Лемма (вырезание на аффинной прямой)

Пусть $U \subset V$ — пара вложенных окрестностей по Зарисскому замкнутой точки z в $\mathbb{A}_K^1$, тогда $[i]: (U, U - z) \rightarrow (V, V - z)$ в $\overline{\text{Wor}}_K^{\text{pair}}$ является изоморфизмом.

Лемма (эталное вырезание в размерности 1)

Пусть $\pi: X \rightarrow X'$ — этальный морфизм гладких кривых с тривиальными каноническими классами, z и z' — точки X и X' такие, что $\pi(z') = z$ и поля вычетов z и z' изоморфны, $U = \varprojlim_{z \in V \subset X} V$, $U' = \varprojlim_{z' \in V' \subset X'} V'$, тогда:

- а) существует $\Phi \in \overline{\text{Wor}}_K^{\text{pair}}((U, U - z), (X', X' - z'))$ такой, что $[\pi \circ \Phi] = [i]$ в $\overline{\text{Wor}}_K^{\text{pair}}((U, U - z), (X, X - z))$;
- б) существует $\Psi \in \overline{\text{Wor}}_K^{\text{pair}}((U, U - z), (X', X' - z'))$ такой, что $[\Psi \circ \pi] = [i']$ в $\overline{\text{Wor}}_K^{\text{pair}}((U', U' - z'), (X', X' - z'))$.

Отличия *Witt*-соответствий и *Cor*-соответствий

- Наличие дополнительного данного – квадратичной формы (в геометрических конструкциях задаётся ориентация относительного канонического класса), которое должно быть согласованно для различных трансферов.
- При композиции $(P, q_P) \in P(X, Y)$ с регулярным отображением $f: Y \rightarrow Z$ модуль (и квадратичное пространство) сохраняется, в то время как для цикл – носитель может измениться.
(Существенно в доказательстве этального вырезания)
- Пусть X – открытое подмножество в $\mathbb{A}_K$ (где K – поле функций гладкого многообразия), тогда
 $(k[X \times X]/I(\Delta)^n, q) = 0$, для любой формы q при чётном n .
 $(k[X \times X]/I(\Delta)^n, q) = (g)$ (где g – обратимая функция на X , и (g) – квадратичная форма ранга 1), для любой формы q при нечётном n .
(Используется в доказательстве инъективности и вырезания на аффинной прямой)