Московский Государственный Университет

имени М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Исмаилов Исмаил Габулла оглы

Условная оптимизация
при наличии связей
в виде операторных уравнений.

Специальность 01.01.09 – Дискретная математика и
математическая кибернетика

Автореферат диссертации

на соискания ученонй степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре Исследования операций факультета Вычислительной математики и кибернетики **Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.**

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент

Владимир Викторович Морозов

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н ------

к.ф.-м.н ------

Ведущая организация:

Защита состоится «____» ________ 201_ года в ____ часов ____мин. на заседании Диссертационного совета ---№----- при фаультете ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова по адресу 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, ауд. ____

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова по адресу 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52.

Автореферат разослан «____» ________ 201_ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета ------------

Общая характеристика работы.

Постановка задач. В работе рассматриваются вопросы разрешимости и методы решения некоторых классов задач условной оптимизации. Отличительной чертой у рассматриваемых задач является наличие ограничения в виде операторного уравнения и включения.

Пусть B – банахово пространство, V – рефлексивное банахово пространство, V'–пространство, сопряженное с V, $K\subset B$ – некоторое множество. Формулировка основной группы задач, рассматриваемых в настоящей работе, следующая:

З1.
$$J(k,u)\to\min,\ k\in K,$$
$$A(k)u=f(k), \tag{1}$$

где $A(k):V\to V'$, $f(k)\in V'$ при $k\in K$. Предполагается, что уравнение (1) имеет единственное решение $u(k)\in V$ для любого $k\in K$.

Пример 1В. Задача оптимального выбора распределения жесткости мембраны заключается в минимизации целевого функционала J(u) на множестве решений семейства граничных задач

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x))=f,\quad x\in\Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega}=0,$$

из соболева пространства $H_0^1(\Omega)$, где параметр семейства – коэффициент k(x), принадлежит множеству

$$K=\{k\in L_\infty(\Omega)\mid 0<\alpha\le\xi_1(x)\le k(x)\le\xi_2(x)<\infty\}.$$

Здесь $\Omega\subset R^m$ – некоторая область.

Пример 2В. Задача о минимизации жесткости кручения или крутящего момента, соответствующего единичной степени кручения заключается [2,4] в минимизации функционала

$$J(u)=2\int_\Omega u(x)dx,$$

на множестве областей

$$\{\Omega|\Omega\subset\Pi\}$$

задания граничной задачи:

$$-\mathrm{div}(\nabla u(x))=2,$$

$$u|_{\partial\Omega}=0.$$

Здесь $\Pi\subset R^m$ – некоторая область.

Пример 3В. Пусть в задаче **3I**: $B=B_1\times V'$, $K=K_1\times K_2$, $K_1\subset B_1$, $K_2\subset V'$, $A(k)u=A(k_1)u$, $f(k)=k_2$. Тогда ограничение (операторное уравнение) приобретает вид $A(k_1)u=k_2$ и мы имеем задачу условной оптимизации с ограничением в виде операторного включения $A(k_1)u\in K_2$. В частности, если $K_1=B_1$, $V'= R^2$, а $K_2\subset R^2$ обозначает первую четверть (правую половину абсциссы) то задача **3I** переходит в задачу математического программирования с двумя ограничениями в виде неравенств (одного неравенства и одного равенства). Случай $K_2=V'$ соответствует отсутствию ограничения $A(k_1)u=k_2$.

Пример 4В. Пусть в примере 3В $A(k_1)u=Au$, $J(k,u)=J(u)$, $K_2=AU$, где $A:V\rightarrow V'$ – линейное взаимно однозначное отображение, например, оператор вложения, $U\subset V$ некоторое множество. В таком случае мы имеем общую задачу условной оптимизации

$$J(u)\rightarrow\min,\ u\in U\subset V.$$

Пример 5В. Задача оптимизации анизотропных свойств упругих тел (см. [4 - с.159]) заключается в минимизиации функционала $J(u)$ на решениях из соболева пространства $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ семейства уравнений

$$\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x))=f,\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

где параметр семейства, матрица $A(x)$, принадлежит множеству:

$$M=\{A(x):R^m\rightarrow R^m,\ \gamma\cdot|\xi|^2\le(A(x)\xi,\xi)\le\delta\cdot|\xi|^2 \text{ для } \forall\xi\in R^m, \text{ при п.в. } x\in\Omega\}$$

Здесь $\Omega\subset R^m$ – некоторая область, Элементы матрицы $A(x)$ – ограниченно-измеримые функции $a_{ij}(x)\in L_\infty(\Omega)$, $i,j=1,2,\ldots m$, $\gamma>0$.

Актуальность темы исследования. Спектр практических проблем, которые приводят к задачам условной оптимизации при наличии связей в виде граничных или начально-краевых задач для уравнений с частными производными, очень широкий. Систематическое изучение таких задач начинается с 60-х годов. Ранее, исследования в этой области концентрировались вокруг небольшого числа одномерных задач. Развитием методов вариационного исчисления, теории оптимальных процессов, нелинейного программирования и др., в последующий период стало возможно проведение общих исследований в этом направлении. Основные результаты того периода систематизированы в монографиях А.Г. Бутковского [3] (1965г.) и Ж-Л. Лионса [1] (на французском в 1969г., перевод на русский язык в 1972г.).

В книгах Ж-Л. Лионса [1] и К.А. Лурье [2] обращается внимание на специфику задач оптимизации старших коэффициентов эллиптических уравнений 2-го порядка на аспектах разрешимости [1] и вывода необходимых условий оптимальности [2]. В работах [5-7], в работе автора [2] приведены примеры задач оптимизации старших коэффициентов, в которых отсутствует оптимальный коэффициент. В целом, общие теоремы разрешимости задач оптимизации старших коэффициентов удалось доказать после разработки теории сходимости обратных операторов – G-сходимости [8-11]. Но, эта теория показала, что множество скалярных старших коэффициентов не замкнуто в G-топологии, и соответствующее расширение экстремальной задачи (т.е. G-замыкания класса скалярных коэффициентов) [12] приводит к задачам оптимизации в классе матриц. (В примере 1В это означает, что свойства мембраны из изотропного материала могут быть сколь угодно близки к свойствам мембраны из анизотропного материала.) Это обстоятельство углубляет важность разработки методов для поиска оптимальных матриц.

Упомянутые в [2] проблемы на пути получения необходимых условий оптимальности решены в работах автора [1-4],[7]. В работах автора [1-3],[7] получены условия оптимальности, установлено разрешимость некоторых классов задач.

Вопросы существования оптимальной области задания граничных задач рассматривались в работах [7],[13-16], и др. Подходы к решению таких задач предложены в работах [2],[4],[17-21] и др.

Цели исследования. Целью диссертации является исследование двух основных вопросов, связанных с задачами условной оптимизации со связями в виде операторных уравнений:

- существование оптимального решения
- методы поиска решения:

  а) вывод необходимых условий оптимальности;

  б) построение численных методов минимизации.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В ней впервые доказываются (разными методами) условия оптимальности для общей задачи условной оптимизации со связью в виде операторных уравнений, в частности, для задач оптимального управления эллиптическими системами. Из доказанных необходимых условий выводятся принцип максимума Понтрягина и правило множителей Лагранжа для этих задач. Для одного класса невыпуклых задач доказывается необходимое и достаточное условие оптимальности, т.е. на них обобщается теорема Кун-Таккера. Доказаны ряд теорем разрешимости оптимизационных задач. Построена теория оптимального выбора области задания граничных задач,

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации построена единая теория задач условной оптимизации при наличии связей в виде операторных уравнений, приведены общие методы решения таких задач. Вопросы разрешимости, непрерывной зависимости решения от данных задачи и методы решения изложены с единой позиции. Обращено внимание на некоторые возможные обобщения теорем, не останавливаясь на подробностях. Некоторые ранее известные утверждения теории оптимизации получены, как следствия утверждений этой теории.

Практическая ценность работы заключается в том, что исследования некоторых типов задач доведены до этапа использования пакетов прикладных программ для получения их решений в явном виде. Это относится к задачам оптимизации области задания граничных задач, оптимизации коэффициента нелинейного уравнения четвертого порядка. В некоторых случаях выписываются явные формулы для решений задач.

Методология и методы исследования. Теоремы о существовании экстремума – оптимального коэффициента или правой части – в работе доказываются путем установления компактности множества решений уравнения состояния двумя способами: 1) через их непрерывную зависимость от управляющего параметра; 2) через разрешимость обратных задач.

Для исследования задач о выборе оптимальной области задания эллиптических систем, вводится понятие решения уравнения с неограниченными коэффициентами, с помощью которого задача оптимизации области задания эллиптических уравнений приводится к задаче оптимального выбора их младших коэффициентов. Вводится понятие невырожденной задачи, устанавливается критерия разрешимости. Для доказательства разрешимости одного класса задач с нелинейным уравнением состояния непосредственно строится минимизирующая последовательность, доказывается ее сходимость.

Для поиска решения оптимизационных задач доказываются необходимые условия оптимальности, характеризующие их решения. Для одних типов задач формула решения получаются из условий оптимальности, для решения других предлагаются численные методы.

Положения, выносимые на защиту.

1. Для общей задачи оптимизации доказываются необходимые условия оптимальности, которые в ряде случаев позволяют выписать непосредственно формулу решения задачи. Предложенная формулировка условий оптимальности «гибкая» и позволяет привлечь методов смежных математических дициплин для доведения процесс решения до числового

результата. Например, указывется путь, как с привлечением методов теории матриц можно найти оптимальную матрицу в явном виде.

2. Построена теория выбора оптимальной области задания граничных задач, которая позволяет найти оптимальную область задания эллиптической системы с дифференциальным оператором любого порядка. В общем случае, для достижения этой цели необходимо решить систему оптимальности, которую составляют уравнение состояния и сопряженное уравнение. Оптимальной будет подобласть, в которой произведение решений этих уравнений отрицательна. А решение упомянутой системы вопрос не теоретический, а вычислительный.

3. Вопрос существования оптимального коэффициента решается путем изучения свойств семейства решений уравнения состояния, соответствующего данному семейству коэффициентов, непосредственным построением минимизирующей последовательности и путем доказательства эквивалентных условий существования.

Апробация результатов. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на научной конференции XXI Гагаринские чтения, Москва, 1995, на международной конференции, посвященной памяти академика А.Н. Тихонова, IIPP-96, МГУ, на международной конференции "Интеллектуальные системы", Санкт-Петербург, 1996.

Основные результаты диссертации обсуждались на факультете ВМиК МГУ имени М.В.Ломоносова на семинаре под руководством профессора Ф.П. Васильева.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1-7].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, включающих в себя в совокупности 16 параграфов, заключения и списка литературы. Объем работы 102 страницы. Список литературы состоит из 67 наименований

Краткое содержание диссертации

В первой главе рассматриваются задачи условной оптимизации при наличии связей в виде операторных уравнений в абстрактных банаховых пространствах.

Пусть B – банахово пространство, V – рефлексивное банахово пространство, V' – пространство, сопряженное с V. Пусть $K\subset B$ некоторое множество.

Определение. Положим $p,k\in K$.

– разность k-p называется допустимым направлением для $p\in K$, если существует положительное число ε_0 такое, что для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ $p+\varepsilon\cdot(k-p)$ принадлежит множеству K.

– множество $K\subset B$ называется конусом в пространстве B, если $K=\{k\in B|$ $k\in K\Rightarrow\alpha k\in K\ \ \forall\alpha\geq0\}$.

– Пусть G – банахово пространство, G' – его сопряженное. Конус $Z'\subset G'$ называется сопряженным к конусу $Z\subset G$, если для любых $\lambda\in Z'$, $z\in Z$ $\langle\lambda,z\rangle\geq0$

Для оптимальной пары в задаче **З1** справедливо следующее условие оптимальности:

Лемма 1. Пусть A(k) – оператор, удовлетворяющий неравенству

$$\chi\cdot\|u-v\|^2 \leq \langle A(k)u-A(k)v,u-v\rangle, \tag{3}$$

при всех $k\in K$, функционал Понтрягина

$$H(k,u,w)= \langle A(k)u-f(k),w\rangle_V-J(k,u),$$

дифференцируем на множестве пар $(k,u)\in K\times U(K)$, где

$$U(k)=\{v\in V|\ \|v\|\leq\alpha^{-1}\|f(k)-A(k)0\|\},$$

A(k)u – отображение, дифференцируемое по u, оператор A(k) и функционал f(k) – липщицевые с коэффициентами L_1 и L_2 соответственно:

$$\|A(k)u-A(p)u\|\leq L_1\|k-p\|_B\|u\|_V,\quad \|f(k)-f(p)\|\leq L_2\|k-p\|.$$

Тогда оптимальная пара (p,v) в задаче **З1** удовлетворяет следующему неравенству

$$H(p,v,w)-H(k,v,w)\geq o(\|p-k\|), \qquad (A)$$

где w – решение сопряженного уравнения

$$H'_u(p,v,w)=0. \blacklozenge \qquad (4)$$

(здесь и далее символ ♦ обозначает конец формулировки утверждения)

Эта лемма позволяет, в частности, получить необходимое условие оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина. Например, для решения задачи из примера 1В можно утверждать следующее условие оптимальности:

Теорема 1. Пусть J(u) – функционал, дифференцируемый на $H_0^1(\Omega)$, $p(x)\in K$ реализует минимум функционала J(u) на множестве K, v(x) – соответствующее ему решение граничной задачи

$$\operatorname{div}(p\cdot\nabla v(x))=f(x),\ x\in\Omega\subset R^m, \qquad (5)$$

$$v|_{\partial\Omega}=0.$$

Тогда выполнено следующее условие оптимальности:

$$p(x)\cdot(\nabla v(x),\nabla w(x)) = \max_{\xi\in[\alpha,\beta]} [\xi\cdot(\nabla v(x),\nabla w(x))],\ \ \forall x\in\Omega \qquad (6)$$

где w(x) – решение сопряженной граничной задачи

$$\operatorname{div}(p\cdot\nabla w(x))=J'(v(x)),\ x\in\Omega\subset R^m$$

$$w|_{\partial\Omega}=0. \blacklozenge$$

Аналогично для задачи из примера 3В из леммы 1 можно получить

Следствие 1. Если в задаче 3I (v,p) – оптимальная пара, k-p – допустимое направление для точки p, тогда справедливо неравенство

$$\langle H'_k(p,v,w),p-k\rangle\geq 0. \blacklozenge \qquad (7)$$

Это неравенство вместе с сопряженным уравнением $H'_u(p,v,w)=0$ утверждает справедливость принципа Лагранжа для задачи **3I**.

Следствие 2. Оптимальный элемент в задаче из примера 4В удовлетворяет вариационному неравенству

$$\langle J'(v),u-v\rangle\geq 0,\ \forall u\in U. \blacklozenge \qquad (8)$$

32. Пусть функционал J(k,u) минимизируется на решениях уравнения состояния

$$A(k)u=f(k)$$

при дополнительном ограничении

$$F(k,u)+z=0. \qquad (9)$$

Здесь параметр k меняется на некотором множестве K банахова пространства B, функционал F отображает пару (k,u) в банахово пространство G, $z\in Z\subset G$.

Положим:

$$H(k,z,u,w,\lambda)=\langle A(k)u-f(k),w\rangle_V-J(k,u)+\langle\lambda,F(k,u)+z\rangle_G. \qquad (10)$$

Здесь $\lambda\in G'$, $w\in V$.

Для этой задачи справедливо следующее условие оптимальности:

Лемма 2. Пусть A(k) – оператор, удовлетворяющий неравенству (3) при всех $k\in K$, J(k,u) – функционал, дифференцируемый на множестве пар $(k,u)\in K\times U(k)$, где

$$U(k)=\{v\in V|\ \|v\|\le\alpha^{-1}\|f(k)-A(k)0\|\},$$

функционал $H(k,z,u,w,\lambda)$ дифференцируем по u и k, оператор A(k) и функционал f(k) – липщицевые с коэффициентами L_1 и L_2 соответственно:

$$\|A(k)-A(p)\|\le L_1\|k-p\|,\quad \|f(k)-f(p)\|\le L_2\|k-p\|,$$

(p,v,d) – оптимальная тройка в минимизационной задаче, а w – решение сопряженного уравнения

$$H'_u(p,d,v,w,\lambda)=0. \qquad (10)$$

Тогда оптимальная тройка удовлетворяет следующему условию оптимальности

$$H(p,d,v,w,\lambda)-H(k,z,v,w,\lambda)\ge o(\|p-k\|),\ \forall k\in K,\ \forall z\in Z.\blacklozenge \qquad (A')$$

Дополнительное ограничение (9) обобщает функциональные ограничения в виде неравенств и равенств. В частности, если $K\subset B$ – выпуклое множество, $Z\subset G$ – конус, то из леммы 2 можно извлечь следствия:

1. $\langle H'_k(p,d,v,w,\lambda),p-k\rangle\ge 0,\ \forall k\in K,\ \forall z\in Z$
2. а) $\langle\lambda,F(p,v)\rangle_G=0.$

б) $\langle\lambda,z\rangle_G\geq0$.

Условия 1) – это условие стационарности функционала Лагранжа. Равенство 2а) выражает условия дополняющей нежесткости. Неравенство 2б) показывает, что λ принадлежит конусу, сопряженному Z. Если G – сеперабельное гилбертово пространство и Z – множество векторов с неотрицательными компонентами, тогда Z – самосопряженный конус. В этом случае из условия 2б) следует включение $\lambda\in Z$, т.е. условие 2б) выражает неотрицательность компонентов вектора λ (неотрицательность множителей Лагранжа соответствующих ограничениям в виде неравенств). В этих предположениях условия 1) и 2) совпадают с условиями принципа Лагранжа, приведенными, например в [22,с.148],[23,с.47]

Из формулы (9) следует равенство:

$$H'_Z(p,d,v,w,\lambda)=\lambda. \qquad (11)$$

Учитывая (11) в условиях 2а), 2б) легко заметить, что эти условия вместе выражают условия оптимальности типа (7), сформулированные для задачи минимизации функционала Лагранжа (9) на конусе $z\subset Z$ (см. [22,с.140]). А условия 1) означает запись вариационного неравенства типа (7) для задачи минимизации функционала (9) на выпуклом множестве $k\in K$. Для сопоставления приведем еще одну теорему:

Теорема 2. Пусть К – выпуклое множество банахово пространства В, и выполнены условия леммы 2. Кроме того, известно, что функционал $H(k,d,v,w,\lambda)$–вогнут по k. Тогда выполнено следующее условие оптимальности:

$$H(p,d,v,w,\lambda)=\max_{k\in K,\ z\in Z} H(k,z,v,w,\lambda). \blacklozenge \qquad (12)$$

В первой главе приводятся также необходимые и достаточные условия оптимальности. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_1(A,u)=J_1(A(k),u)=J_1(k,u) = \langle A(k)u,u\rangle+G(k) \qquad (13)$$

на решениях семейства линейных операторных уравнений

$$A(k)u=f(k) \qquad (14)$$

с оператором $A(k)$, удовлетворяющим неравенству (3) для любого $k\in K$.

Определение. Отображение $u(k):K\to V$ назовем сильно-слабо непрерывным, если сильная сходимость последовательности $\{k_n\}$ в банаховом пространстве B к элементу $k_0\in B$ влечет за собой слабую сходимость последовательности $u(k_n)$ в банаховом пространстве V к элементу $u(k_0)$

Теорема 3. Пусть, K – выпуклое множество, $u(k)$ сильно-слабо непрерывное отображение из K в V, а функционал

$$H(k,u)=\langle A(k)u,u\rangle-2\langle f(k),u\rangle-G(k)$$

вогнут по k. Тогда для того, чтобы пара (k_0,u_0) была оптимальной для минимизационной задачи ((13)-(14)), необходимо и достаточно, чтобы эта пара образовала седловую точку функционала $H(k,u)$:

$$H(k,u_0)\le H(k_0,u_0)\le H(k_0,u) \qquad \forall k\in K,\ \forall u\in V. \blacklozenge$$

ЗЗ. Пусть V – вещественное рефлексивное банахово пространство, V'– пространство сопряженное V. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(A,u) \tag{15}$$

на некотором множестве M операторов $A:V\to V'$, где u является решением уравнения состояния

$$Au=f \tag{16}$$

для некоторого фиксированного $f\in V'$.

Предполагается, что для любого оператора $A\in M$ существует единственное решение $u\in V$ операторного уравнения (16), т.е. уравнение (16) определяет отображение $u(A):M\to V$.

Теорема 4. Пусть M – выпуклое подмножество множества линейных коэрцитивных операторов, удовлетворяющих неравенству (3), $G(A)$–выпуклый функционал: $G:M\to R^1$, $J(u)$–функционал, дифференцируемый в шаре $Z=\{u\in V|\ \|u\|\le\alpha^{-1}\cdot\|f\|\}$. Тогда, если оператор $B\in M$ реализует минимум функционала

$$J_1(A,u)=J(u)+G(A),$$

то выполнено следующее условие оптимальности

$$\langle(Bu(B),w\rangle\text{-}G(B)=\max_{A\in M}[\langle Au(B),w\rangle\text{-}G(A)], \qquad (17)$$

где

$$B^*w=J'(v).\blacklozenge$$

Определение. Говорят, что оператор $A:V\to V'$ не меньше оператора $B:V\to V'$ $(A\geq B)$, если для любого $u\in V$

$$\langle(A\text{-}B)u,u\rangle \geq 0$$

Определение. Функционал $G:\{A:V\to V'\}\to R^1$ назовем монотонно невозрастающим на множестве $\{A:V\to V'\}$ если неравенство $A\geq B$ влечет за собой неравенство $G(B) \geq G(A)$

Следствие 3. Пусть M–выпуклое подмножество множества линейных самосопряженных коэрцитивных операторов, G(A) монотонно невозрастающий выпуклый функционал. Пусть так же для любых $A\in M$, $u\in V$ и положительного числа α

$$\alpha\cdot\|u\|^2\leq\langle Au,u\rangle$$

Тогда для того, чтобы оператор $B\in M$ реализовал минимум функционала

$$J_1(A,u)=\langle Au,u\rangle+G(A),$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\langle(Bu(B),u(B)\rangle\text{-}G(B)=\max_{A\in M}[\langle Au(B),u(B)\rangle\text{-}G(A)].\blacklozenge$$

Предположим, что D-B–допустимое направление для оператора $B\in M$. Рассмотрим уравнение

$$(B+\varepsilon\cdot(D\text{-}B))u=f \qquad (18)$$

для достаточно малых ε. Для каждого фиксированного оператора D это уравнение определяет некоторую функцию $u(\varepsilon)$.

Лемма 3. Пусть B и D – линейные ограниченные операторы, удовлетворяющие неравенству (3). Тогда функция $u(\varepsilon)$, определяемая уравнением (15), имеет производные любого порядка. Притом справедливы следующие формулы:

$$u^{(m)}(\varepsilon)=m\cdot[(B+\varepsilon\cdot(D-B))^{-1}(B-D)]u^{(m-1)}(\varepsilon).$$

$$u^{(m)}(\varepsilon)=m!\cdot[(B+\varepsilon\cdot(D-B))^{-1}(B-D)]^{m}u(\varepsilon).\ \blacklozenge$$

С помощью этих формул можно доказать условия оптимальности первого и второго порядков. Получаемое из этих формул условие оптимальности первого порядка аналогично теореме 4. Приведем условие оптимальности второго порядка.

Теорема 5. Пусть M – выпуклое подмножество множества линейных коэрцитивных операторов, удовлетворяющих неравенству (3), J(u)– функционал, дважды непрерывно дифференцируемый в шаре $Z=\{u\in V, \|u\|\le\alpha^{-1}\cdot\|f\|\}$,

$$J(u)\in C^{2}(Z).$$

Тогда, если оператор $B\in M$ реализует минимум функционала J(u) на множестве M, $v=B^{-1}f$ и $J'(u(B))=0$, то для допустимого направления $D\in M$ выполнено следующее условие оптимальности:

$$\langle J''(v)(v-B^{-1}Dv,v-B^{-1}Dv\rangle\ge 0.\ \blacklozenge$$

Во второй главе доказываются теоремы о разрешимости минимизационных задач.

34. Пусть $\Pi\subset R^{n}$ – некоторая ограниченная область. Рассмотрим задачу

$J(u)\to\min$, $K=\{(k_1(x),\dots k_r(x))=k(x)\in L_\infty^{\ r}(\Pi)|\ k(x)\in P$ для п.в.$x\in\Pi\}$.

$$Lu+B(x,k_1(x),\dots k_r(x),u,\nabla u)=f,\ \ u\in H_0^{1}(\Pi),$$

где $P\subset R^{r}$, $L:H_0^{1}(\Pi)\to H^{-1}(\Pi)$ непрерывный дифференциальный оператор второго порядка, B – функция, измеримая по x и непрерывная по всем остальным аргументам, $J(u):H_0^{1}(\Pi)\to R^{1}$, $f\in H^{-1}(\Pi)$.

Обозначим через $Q\subset R^{n+1}$ множество обладающее свойством: для $\forall u\in U(K)$ и для п.в. $x\in\Pi$, $(u(x),\nabla u(x))\in Q$, а через coQ обозначим его выпуклую оболочку.

Лемма 4. а) Пусть в задаче 34 P – связное множество и для $q\in Q$ существуют функции $p_0(x,q),p_1(x,q)\in K$ такие, что отображения

$\varphi(x,\cdot),\psi(x,\cdot):H_0^1(\Pi)\to L_2(\Pi)$, определенные по формулам

$$\varphi(x,q)=\max_{\xi\in P}[-B(x,\xi,q)]=-B(x,p^1(x,q),q),$$

$$\psi(x,q)=\min_{\xi\in P}[-B(x,\xi,q)]=-B(x,p^0(x,q),q)$$

непрерывны. Тогда U(K) – замкнутое множество.

б) Если, кроме того, L – линейный оператор, $\varphi(x,q)$ вогнута, а $\psi(x,q)$ выпукла по q на coQ для п.в. $x\in\Pi$, то U(K) – выпуклое множество.♦

Теорема 5. Пусть оператор $L+B(k):V\to V'$ удовлетворяет неравенству (3) при всех k из K., $||B(k)0||\le M$ для некоторого M>0 и для всех k из K, оператор $A:V\to V'$ ограничен:

$$||Au-A0||\le L||u|| \text{ при } ||u||\le\chi^{-1}(||f-A0||+M),\ L=\text{const}.$$

$J(k,u)=J(u):H_0^1(\Pi)\to R^1$ – слабо непрерывный функционал. Тогда задача З4 имеет решение. ♦

Рассмотрим задачу минимизации линейного функционала

$$(g,u):\ R^2\to R^1,$$

на решениях семейства матричных уравнений

$$Au=f.$$

Здесь $g\in R^m$ – вектор цены, а матрица A принадлежит множеству:

$$A\in M=\{A:R^2\to R^2,\ \gamma\cdot|u|^2\le(Au,u)\le\delta\cdot|u|^2 \text{ для } \forall u\in R^2\}$$

Рассмотрим множество матриц вида $A=\lambda\cdot R(\varphi)$.

Здесь λ – число, $R(\varphi)$ – матрица поворота. Составим два множества

$$Z_1=\{v\in R^2|\ v=Au,\ A\in M,\ u\in R^2\},$$

$$Z_2=\{v\in R^2|\ v=Au\cdot R(\varphi)u,\ \lambda\cdot R(\varphi)\in M,\ u\in R^2\}.$$

Можно показать, что $Z_1=Z_2$, и при этом между элементами матриц A и $\lambda\cdot R(\varphi)$ должны выполняться соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a_{11}u_1u_2+a_{12}\,u_2^2-a_{21}u_1^2-a_{22}u_1u_2}{(Au,u)}$$

$$\lambda\cos\varphi = \frac{(Au,u)}{(u,u)^2} \qquad (19)$$

Таким образом, минимизация на множестве Z_1 равносильна минимизации на множестве Z_2. Из (18), (19) ясно, что условие $\lambda\cdot R(\varphi)\in M$ равносильно неравенству

$$\gamma \le \lambda\cdot\cos\varphi \le \delta, \qquad (20)$$

т.е.

$$Z_2 = \{v\in R^2 \mid v=\lambda\cdot R(\varphi)u,\ \gamma\le\lambda\cdot\cos\varphi\le\delta,\ \frac{-\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ u\in R^2\}.$$

Условия оптимальности (17) при этом равносильно равенству

$$(Bv,w) = \max_{\varphi\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ \gamma\le\lambda\cdot\cos\varphi\le\delta} (\lambda\cdot R(\varphi)v,w) \qquad (21)$$

Здесь

$$\lambda\cdot R(\varphi)u=f,\ \ \lambda\cdot R^T(\varphi)w=g. \qquad (22)$$

Оптимальная матрица будет иметь вид:

$$B = \begin{cases} \begin{pmatrix} \delta & \mathrm{tg}\varphi \\ -\mathrm{tg}\varphi & \delta \end{pmatrix}, & \text{при } (R(\varphi)v,w) > 0 \\ \begin{pmatrix} \gamma & \mathrm{tg}\varphi \\ -\mathrm{tg}\varphi & \gamma \end{pmatrix}, & \text{при } (R(\varphi)v,w) < 0 \end{cases} \qquad (23)$$

Для решения задачи из примера 5B оптимальную матрицу нужно выбирать, пользуясь равенством (23) для каждой точки $x\in\Omega$. В этой задаче область Ω – поперечное сечение стержня.

Пусть матрица $B\in M$ оптимальна в этой задаче, $v(x)\in H_0^1(\Omega)$ соответствующее решение уравнение (2), а $w(x)\in H_0^1(\Omega)$ решение сопряженного уравнения

$$\mathrm{div}(B^*(x)\nabla w(x))=J'(v(x)),\quad x\in\Omega.$$

Формула (23) показывает, что для любого целевого функционала J(u) среди оптимальных стержней есть тот, который получается сшиванием по всей длине двух (всего двух) стержней с разными характеристиками. Притом линия шва определяется уравнением $R(\varphi(x))v(x),w(x))=0$. Если в области Ω функция

$R(\varphi(x))v(x),w(x))$ не меняет знак, то материал оптимального стержня будет изотропным с характеристиками или $\begin{pmatrix} \delta & tg\varphi \\ -tg\varphi & \delta \end{pmatrix}$, или $\begin{pmatrix} \gamma & tg\varphi \\ -tg\varphi & \gamma \end{pmatrix}$.

Третая глава посвящена оптимизации области задания граничных задач. В ней предлагается метод сравнения решений граничных задач (например, граничной задачи об изгибе пластины), заданных в разных областях

$$Au=f,\ u\in H_0^2(\Omega),\ \Omega\in K=\{\Omega|\Omega\subset\Pi\subset R^2\}, \tag{24}$$

а значить, из разных функциональных пространств.

Все граничные задачи вида (24) записывается в одном пространстве – в пространстве $H_0^2(\Pi)$, но с другим уравненим:

$$Au+ku=f,\ u\in H_0^2(\Pi). \tag{25}$$

Уравнение (25) описывает изгиб пластины (той же, что и в уравнении (24) на упругом основании. Выбором коэффициента k, называемого коэффициентом постели, в виде

$$k(x)=\begin{cases} 0, x\in\Omega \\ \infty, x\in\Pi\backslash\Omega \end{cases} \tag{26}$$

граничную задачу (24) можно записать в виде (25). Вне области Ω основание должно быть абсолютно жестким, а в области Ω его упругое сопротивление нулевое.

Решение уравнения (25) с коэффициентом (26) можно построить, решая уравнения (25) с коэффициентами

$$k_\beta(x)=\begin{cases} 0, x\in\Omega \\ \beta, x\in\Pi\backslash\Omega \end{cases} \tag{27}$$

и предельным переходом $\beta\to\infty$.

В работе предлагается этот предельный переход осуществить, предварительно связывая процесс перехода с минимизируемым функционалом.

Предположим, что $A:H_0^m(\Pi)\to H^{-m}(\Pi)$ – сильно монотонный полунепрерывный оператор, $f\in H^{-m}(\Pi)$. Тогда для любого $k(x)\in L_\infty(\Pi)$, $k(x)\geq 0$ п.в. в Π уравнение

$$Au+ku=f \tag{28}$$

имеет единственное решение $u(k)\in H_0^m(\Pi)$. Пусть $\Omega\subset\Pi$. Положим

$$k(x) = \begin{cases} \xi(x), & \text{при } x\in\Omega, \\ \infty, & \text{при } x\in\Pi\backslash\Omega \end{cases} \qquad (29)$$

где $\xi(x)\in L_\infty(\Pi)$, $\xi(x)\geq 0$ п.в. в Π. Рассмотрим последовательность коэффициентов

$$k_q(x)=\beta_q(1-\chi(\Omega))+\xi(x)\chi(\Omega),$$

где $\chi(\Omega)$–характеристическая функция области Ω, β_q=const, $\beta_q \geq 0$ для любого $q\in N$, $\beta_q\to\infty$ при $q\to\infty$.

Определение. Решением граничной задачи (28), соответствующим коэффициенту (29), назовем предел последовательности функций $u(k_q)\in H_0^m(\Pi)$, при $q\to\infty$.

Теорема 6.. Пусть A – линейный коэрцитивный ограниченный оператор. Тогда существует единственное решение u_0 граничной задачи (28), соответствующее коэффициенту (29), причем

$$A_\Omega u_0 +\xi(x)u_0=f_\Omega , \ u_0\in H_0^m(\Omega).\blacklozenge \qquad (30)$$

35.

$$J(\chi(\Omega),u)\to\min, \ \ \Omega\in K,$$

$$A_\Omega u=f_\Omega, \ \ u\in H_0^m(\Omega), \qquad (31)$$

где $\chi(\Omega)$ – характеристическая функция области Ω.

Через $u(\Omega)$ обозначим решение граничной задачи (31) и положим $U(K)=\{u(\Omega)|\Omega\in K\}$. Согласно теореме 6

$$u(\Omega)=\lim_{\beta\to\infty} u(\beta(1-\chi(\Omega)),$$

где $u(\beta(1-\chi(\Omega))$ решение уравнения (28) при $k=\beta(1-\chi(\Omega))$.

36.

$$J((1-k/\beta),u)\to\min, \ \ k(x)\in K_\beta,$$

$$Au+ku=f, \qquad (32)$$

$$K_\beta=\{k(x)|\ k(x)=(\beta(1-\chi(\Omega)),\ \Omega\in K,\ \beta=\text{const},\ \beta>0\}.$$

Теорема 7. Пусть A – коэрцитивный линейный ограниченный оператор, последовательность характеристических функций $\chi(\Omega_r)$ сходится $*$-слабо в

$L_\infty(\Pi)$ к характеристической функции области Ω_0. Тогда $u(\Omega_r) \to u(\Omega_0)$ слабо в $H_0^m(\Pi)$.♦

Теорема 8. Пусть A коэрцитивный линейный ограниченный оператор, $J(k,u) \in L_p(\Pi) \times H_0^m(\Pi) \to R^1$ – функционал, слабо непрерывный по u и непрерывный по k, $1 \le p < \infty$, пара $(p(\beta), v(\beta))$ – оптимальна в минимизационной задаче **З6**. Последовательность $\chi(\Omega_\beta) = 1 - p(\beta)/\beta$ $*$-слабо в $L_\infty(\Pi)$ сходится к $\chi(\Omega_0)$, где $\chi(\Omega_0)$ – характеристическая функция области Ω_0. Тогда Ω_0 – решение задачи **З5**.♦

Теорема 9. Пусть функционал J(u) и оператор Au дифференцируемы, A – сильно монотонный оператор, выполнено неравенство [см. 40 с.74]

$$\|u\|_{L_\infty(\Pi)} \le C \|u\|_{H_0^m(\Pi)} \text{ для } \forall u \in H_0^m(\Pi),\ C = \text{const}.$$

Тогда для оптимальной пары (p,v) в задаче **З6** выполнено следующее условие оптимальности:

$$w(x,p(x))v(x,p(x))p(x) = \max_{t \in \{0,\beta\}} w(x,p(x))v(x,p(x))t, \tag{33}$$

где функция w(x,p(x)) решение сопряженного уравнения

$$H_1{}'_u(p,v,w) = 0.♦ \tag{34}$$

З7. $J(u) \to \min$, $k(x) \in K'_\beta = \{k(x) \in L_\infty(\Pi) \mid 0 \le k(x) \le \beta < \infty,\ \beta = \text{const},\ \beta > 0\}$,

$$Au + ku = f. \tag{35}$$

Теорема 10. Пусть функционал J и оператор A дифференцируемы, A – сильно монотонный оператор. Тогда для оптимальной пары (p,v) в задаче **З7** выполнено следующее условие оптимальности:

$$w(x,p(x))v(x,p(x))p(x) = \max_{t \in [0,\beta]} w(x,p(x))v(x,p(x))t \tag{36}$$

где функция w(x,p(x)) решение сопряженного уравнения (34).♦

Известно, что решение задачи **З7** существует т.е. минимум на множестве K'_β достигается. Если

$$w(x,p(x))v(x,p(x)) \ne 0 \text{ для п.в } x \in \Pi,$$

то оптимальный коэффициент p(x) в задаче **37** принимает только два значения т.е. $p(x)\in K_\beta$. Но $K_\beta\subset K'_\beta$. Поэтому задача **36** (и следовательно **35)** тоже имеет решение.

В четвертой главе рассматривается задача минимизации функционала

$$F=\int_\Omega f(x,u(x),\Delta u(x))dx$$

на классе решений граничной задачи

$$\Delta[a(x,k(x),u(x))\,\Delta u(x)]=g(x),\ x\in\Omega, \tag{37}$$

$$u(x)=0,\ \Delta u=0,\ x\in\partial\Omega \tag{48}$$

в ограниченной области $\Omega\subset R^m$, $m\geq 1$, с гладкой границей $\Gamma=\partial\Omega\in C^2$, при $m\geq 2$, соответствующем классу коэффициэнтов

$$K=\{k(x)\in L_\infty(\Omega),\ \ \xi_1(x)\leq k(x)\leq \xi_2(x)\} \tag{39}$$

Здесь $\xi_1(x), \xi_2(x)\in L_\infty(\Omega)$ известные функции.

Устанавливается однозначная разрешимость граничной задачи (37)-(38) для любого $k\in K$, а затем разрешимость минимизационной задачи. Для решения минимизационной задачи предлагается численный метод, доказывается его сходимость, получается необходимое условие оптимальности в виде функционального уравнения.

Обозначим $\quad h=\max\limits_{x\in\Omega\cup\partial\Omega}\rho(x).$

Определение. Будем говорить, что задача (37)-(38) удовлетворяет условию (A) если функция a(x,k,q) равномерно липшицева по переменной q, с константой L, и выполняются следующие неравенства:

$$0<\gamma\leq a(x,p,q),\ \ x\in\Omega,\ p,q\in R^1.$$

$$|g|< M\equiv\gamma^2(Lhd)^{-1}.$$

Определение. Будем говорить, что задача (37)-(38) удовлетворяет условию (B), если функция a(x,p,q) непрерывно зависит от своих двух последних аргументов p и q, измерима по x, кроме того a монотонно невозрастает по q и выполнены следующие неравенства:

$$0<\gamma\leq a(x,p,q)\leq\delta<\infty,\ \text{ для п.в. } x\in\Omega,\ p,q\in R^1,$$

$$g(x) \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega.$$

Теорема 4.3.1. Пусть $f(x,q,r)$ непрерывная функция переменных q и r, измерима по x, монотонно не возрастает по r и монотонно не убывает по q, функция a – строго вогнута по p, а граничная задача (37)-(38) удовлетворяет условиям (A), (B). Тогда

1) граничная задача (37)-(38) имеет единственное решение для $\forall k(x) \in K$,
2) на множестве (39) функционал F достигает своего минимума.

В заключении выражаю глубокую благодарность научному руководителю В.В.Морозову, направившему меня на занятие этой тематикой.

Список литературы.

1. Лионс Ж-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.–М.:Мир, 1972.
2. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. –М.: Наука, 1975.
3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. –М.: Наука, 1965.
4. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. –М.: Наука, 1980
5. Murat M.F. Un contre-example pour de problem du controle dans les coeficient//CRAS ser. A. Paris, 1971. **273**. P. 708-711.
6. Корсакова Л.В. Пример несуществования решения задачи Лионса об оптимальном управлении//Пробл. мат. анализа ЛГУ. 1977. Вып. 6. С.60-67
7. Осипов Ю.С., Суетов А.П. Об одной задаче Ж.Л. Лионса//ДАН СССР. 1984. 276, №2. С.288-291.
8. Жиков В.В., Козлов С.А., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. –М.: Издательская фирма физико-математической литературы, 1993
9. Spognolo S. Convergenze in energy for elliptic operators//Proc. 3-rd Symp. Numer solute. Part. Diff. eq. 1976. P 469-498.
10. Sergio Spognolo. Some convergence problems.//Symp. Math. (1975 (Conv. Alta Matematica Roma, Marzo 1974,
11. Ennio De Giorge. Г-convergenza e G-convergenza.//Bulletino U.M.I. (3) 14-A (1977), 213-220
12. Райтум У.Е. Расширение экстремальных задач, связанных с линейным эллиптическим уравнением//ДАН СССР. 1978, Том243, №2. С.281-283.
13. Муравей Л.А. О существовании решений вариационных задач в областях со свободными границами//ДАН СССР. 1984.278, №3. С. 541-544.

14. Керимов А.К. Задачи оптимизации со свободными границами.ДАН, 266, Т 3, с. 545-548, 1982.Chenais D. On the existence of a solution in a domain identification problem// Math. Anal. And appl. 1975.52. P. 708-219.
15. Tartar L. Rproblemes de kontrole des coefficients dans les equations aux derives partielles//Lect. Notes and mat. Sys. 1975. 107. P. 420-426.
16. Суетов А.П. Алгоритм оптимизации формы эллиптической системы в задаче о теплоизоляции.//Тр.ИММ УрО РАН, т.3, 172-182.
17. Acker Andrew. A free boundary optimization problem.//SIAM vJ. Math. Anal. vol.9, No6, December, 1978.
18. Zolesio Jean-Paul. The material derivative (on speed) method for shape optimization.
19. Zolesio Jean-Paul. Domain variational formulation for free boundary problems. Optimization of distributed parameter system, vol. II, pp. 1152-1194, Njioff. The Hagal, 1981.
20. Pironneau O. Optimal Shape Design for Elliptic Systems. Springer-Verlag, New-York, 1983.
21. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. –М.: Физматлит, 2005.
22. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Издательство МГУ, 1989.

Работы автора по теме диссертации

1. Исмаилов И.Г. Некоторые задачи оптимизации линейных коэрцитивных операторов//Изв. вузов. Приборостроение.1994, №7-8.С. 52-55.
2. Исмаилов И.Г. Некоторые задачи управления коэффициентами для эллиптических урвнений высокого порядка//Вестн. Моск. Ун-та. Сер.15, Вычисл. Матем.. и киберн.. 1996. №3. С. 22-30.
3. Исмаилов И.Г. Морозов В.В. Некоторые задачи оптимального проектирования и сведение их к антагонистической игре.//Вестн. Моск. Ун-та. Сер.15, Вычисл. Матем.. и киберн.. 1998. №2. С. 21-25.
4. Исмаилов И.Г. Некоторые задачи условной оптимизации при наличии связей в виде операторных уравнений. Принцип максимума Понтрягина.//Вестн. Моск. Ун-та. Сер.15, Вычисл. Матем. и киберн.. 1998. №3. С. 31-38..
5. Исмаилов И., Муравей Л.А., Эйниев Э. Некоторые задачи оптимизации конструкций. //Труды международной конференции "Интеллектуальные системы", Санкт-Петербург, Т. 1, С. 221-226, 1996.
6. I.Ismailov and L. Muravey. Some problems of coefficient control for the elliptic equations of high order.//Abstract of international conference dedicated to the memory of academician A.N.Tikhonov. IIPP-96. МГУ. С.81
7. Исмаилов И.Г. Об условиях оптимальности в задачах оптимизации на решениях операторных уравнений.//Проблемы математической физики. М. 1998. С.55-67.