

Новые матричные соотношения типа неравенства Минковского и энтропийные неравенства для квантовых состояний кудитов

Маркович Любовь

Московский физико технического институт
Государственный университет
Москва, Россия

57-ая научная конференция МФТИ

2014 год

Содержание

- Проблемы и задачи
- Неравенство типа Минковского с одним параметром
- Неравенство типа Минковского с двумя параметрами
- Неравенства для квантовой информации фон Неймана и Томографической информации
- Обсуждение и заключение
- Список литературы

Проблемы и задачи

- Задача: Обобщить неравенства типа Минковского (Е. А. Carlen, Е. Н. Lieb: 2008), известные для двухкомпонентных систем, на случай систем без подсистем (кудит со спином $j = 3/2$).
- Метод: Биективное отображение гильбертового пространства одной квантовой системы на Гильбертово пространство $\mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ двухкомпонентной системы (V.N. Chernega, O.V. Man'ko, V.I. Man'ko: 2013)
- Пример использования: Полученные неравенства изучены на примере Вернеровского и X -состояния для кудита $j = 3/2$.

Пусть квантовая система в четырехмерном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задается матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad \rho = \rho^\dagger, \quad \text{Tr} \rho = 1, \quad \rho \geq 0. \quad (1)$$

Разобьем ее на четыре блока размера 2×2

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}, & a_{12} &= \begin{pmatrix} \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{23} & \rho_{24} \end{pmatrix}, \\ a_{21} &= \begin{pmatrix} \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{41} & \rho_{42} \end{pmatrix}, & a_{22} &= \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица плотности в блочном виде

$$\rho = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^p \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) \end{pmatrix},$$

где $p \geq 1$ действительные числа, $\{a_{ij}(p)\}$ - новые блочные матрицы, зависящие от параметра p .

Неравенство типа Минковского с одним параметром

$$(\operatorname{Tr} (a_{11} + a_{22})^p)^{\frac{1}{p}} \leq \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \operatorname{Tra}_{11}(p) & \operatorname{Tra}_{12}(p) \\ \operatorname{Tra}_{21}(p) & \operatorname{Tra}_{22}(p) \end{pmatrix}^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

Неравенство переворачивается при $0 \leq p < 1$.

Обозначим разность между левой и правой частями неравенства $\Delta M(p)$.

Пример: Вернеровское состояние

Состояние кудита со спином $j = 3/2$ может быть описано матрицей Вернера

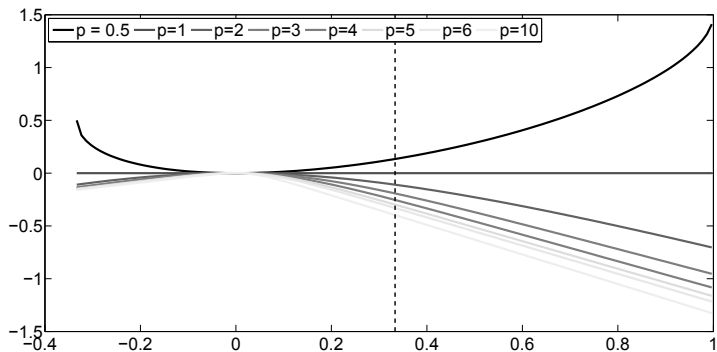
$$\rho^W(r) = \begin{pmatrix} \frac{1+r}{4} & 0 & 0 & \frac{r}{2} \\ 0 & \frac{1-r}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-r}{4} & 0 \\ \frac{r}{2} & 0 & 0 & \frac{1+r}{4} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $-1/3 \leq r \leq 1$. В области, где параметры $1/3 < r \leq 1$, система запутана.

Для $p = 2$ неравенство Минковского с одним параметром имеет вид

$$\Delta\mathcal{M}(2) = -(\sqrt{2}(\sqrt{(3r^2 + 1)} - 1))/2 \leq 0.$$

$\Delta\mathcal{M}(p)$ для Вернеровского состояния для разных параметров p



Пример: X состояние

Если $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{21} = \rho_{31} = \rho_{24} = \rho_{34} = \rho_{42} = \rho_{43} = 0$ то матрица плотности (1) имеет вид

$$\rho^X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\rho_{11}, \rho_{22}, \rho_{33}, \rho_{44}$ действительные положительные числа, ρ_{23}, ρ_{14} комплексные.

Неравенство Минковского (2) для X -матрицы кудита со спином $j = 3/2$ с $p = 2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{M}(2) &= \sqrt{(\rho_{11} + \rho_{33})^2 + (\rho_{22} + \rho_{44})^2} - \sqrt{\rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + |\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2} \\ &- \sqrt{\rho_{33}^2 + \rho_{44}^2 + |\rho_{14}|^2 + |\rho_{23}|^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Неравенства для квантовой информации фон Неймана и Томографической информации

Состояние кудита с матрицей плотности ρ отождествляется со спиновой томограммой

$$\omega(m_1, m_2, \bar{n}_1, \bar{n}_2) = \langle m_1, m_2 | U \cdot \rho \cdot U^\dagger | m_1, m_2 \rangle,$$

где $m_{1,2} = -j, -j+1, \dots, j, j = 0, 1/2, 1 \dots$ проекции спина. Матрица поворота U определена как прямое произведение матриц из $SU(2)$ - группы

$$U = U(\theta_1, \varphi_1, \psi_1) \otimes U(\theta_2, \varphi_2, \psi_2),$$
$$U(\theta_k, \varphi_k, \psi_k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_k}{2} e^{\frac{i(\varphi_k + \psi_k)}{2}} & \sin \frac{\theta_k}{2} e^{\frac{i(\varphi_k - \psi_k)}{2}} \\ -\sin \frac{\theta_k}{2} e^{\frac{i(\psi_k - \varphi_k)}{2}} & \cos \frac{\theta_k}{2} e^{\frac{-i(\varphi_k + \psi_k)}{2}} \end{pmatrix}.$$

Для Вернеровского состояния двух кубитов

собственные числа матрицы Вернера

$$\lambda_1 = \frac{1+3r}{4}, \quad \lambda_{2,3,4} = \frac{1-r}{4}.$$

Тогда частичные матрицы для первого и второго кубитов

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Энтропия фон Неймана для обоих кубитов и для всей системы

$$\begin{aligned} S_1 &= -\text{Tr} \rho_1 \ln \rho_1 = \ln 2, & S_2 &= -\text{Tr} \rho_2 \ln \rho_2 = \ln 2, \\ S_{12} &= -\text{Tr} \rho \ln \rho = -\frac{1+3r}{4} \ln \left(\frac{1+3r}{4} \right) - 3 \frac{1-r}{4} \ln \left(\frac{1-r}{4} \right). \end{aligned}$$

Квантовая информация

$$I_q = S_1 + S_2 - S_{12}, \quad I_q \geq 0.$$

Диагональные элементы матрицы $U \cdot \rho \cdot U^\dagger$

$$\omega(\uparrow, \uparrow) = \omega(\downarrow, \downarrow) = \frac{1}{4} (r (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos(\psi_1 + \psi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2) + 1),$$

$$\omega(\uparrow, \downarrow) = \omega(\downarrow, \uparrow) = \frac{1}{4} (1 - r (\cos(\psi_1 + \psi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)),$$

где введено обозначение $\omega(\uparrow, \uparrow) \equiv \omega\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \bar{n}_1, \bar{n}_2\right)$. След матрицы удовлетворяет условию нормировки $\text{Tr}(U \cdot \rho \cdot U^\dagger) = 1$.

Маргинальные распределения относящиеся к матрицам плотности первого и второго кубитов

$$W_1(\uparrow, \bar{n}_1) = \omega(\uparrow, \uparrow) + \omega(\uparrow, \downarrow), \quad W_1(\downarrow, \bar{n}_1) = \omega(\downarrow, \uparrow) + \omega(\downarrow, \downarrow),$$

$$W_2(\uparrow, \bar{n}_2) = \omega(\uparrow, \uparrow) + \omega(\downarrow, \uparrow), \quad W_2(\downarrow, \bar{n}_2) = \omega(\uparrow, \downarrow) + \omega(\downarrow, \downarrow).$$

Томографическая Энтропия Шеннона

$$\begin{aligned}H_1 &= -W_1(\uparrow, \bar{n}_1) \ln W_1(\uparrow, \bar{n}_1) - W_1(\downarrow, \bar{n}_1) \ln W_1(\downarrow, \bar{n}_1) = \ln 2, \\H_2 &= -W_2(\uparrow, \bar{n}_2) \ln W_2(\uparrow, \bar{n}_2) - W_2(\downarrow, \bar{n}_2) \ln W_2(\downarrow, \bar{n}_2) = \ln 2, \\H_{12} &= -\omega(\uparrow, \uparrow) \ln \omega(\uparrow, \uparrow) - \omega(\uparrow, \downarrow) \ln \omega(\uparrow, \downarrow) \\&\quad - \omega(\downarrow, \uparrow) \ln \omega(\downarrow, \uparrow) - \omega(\downarrow, \downarrow) \ln \omega(\downarrow, \downarrow).\end{aligned}$$

Определим информацию как

$$I_t = \max_{\psi_1, \psi_2, \theta_1, \theta_2} (H_1 + H_2 - H_{12}), \quad I_t \geq 0.$$

Разность между квантовой I_q и максимум томографической информации I_t

$$\Delta I = I_q - I_t \geq 0. \quad (5)$$

Для максимально запутанного Вернеровского состояния

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Delta I = \ln 2 \approx 0.693.$$

Сравнение с Negativity и Concurrence

Для Вернеровского состояния negativity и concurrence

$$N(r) = 3 \left| \frac{r+1}{4} \right| + \left| \frac{1-3r}{4} \right| > 1,$$

$$C(r) = \begin{cases} \frac{3r-1}{2}, & \text{если } \frac{1}{3} < r \leq 1, \\ 0, & \text{если } -\frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{3}, \end{cases}$$

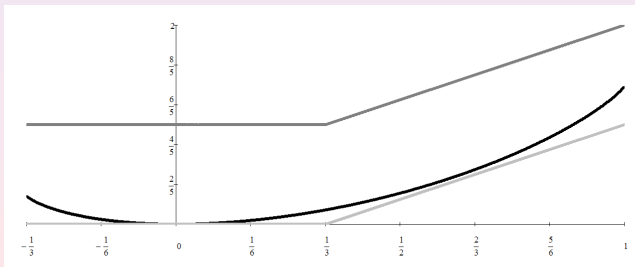


Рис. : Разность ΔI (черная), $C(r)$ (светлосерая), $N(r)$ (темносерая) в зависимости от r .

Неравенство Минковского с двумя параметрами

Матрица плотности для кудита в блочной форме

$$\rho = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \rho = \rho^\dagger, \operatorname{Tr} \rho = 1, \rho \geq 0, \quad (6)$$

Введем обозначения

$$\rho^p = \begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) & \cdots & a_{1n}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) & \cdots & a_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(p) & a_{n2}(p) & \cdots & a_{nn}(p) \end{pmatrix}.$$

Неравенство типа Минковского с двумя параметрами для кудита

$$\left(\operatorname{Tr} \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(q) \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \operatorname{Tra}_{11}(p) & \operatorname{Tra}_{12}(p) & \cdots & \operatorname{Tra}_{1n}(p) \\ \operatorname{Tra}_{21}(p) & \operatorname{Tra}_{22}(p) & \cdots & \operatorname{Tra}_{2n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Tra}_{n1}(p) & \operatorname{Tra}_{n2}(p) & \cdots & \operatorname{Tra}_{nn}(p) \end{pmatrix}^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

где $1 \leq p \leq 2$, иначе неравенство переворачивается.

Для кудита со спином $j = 3/2$

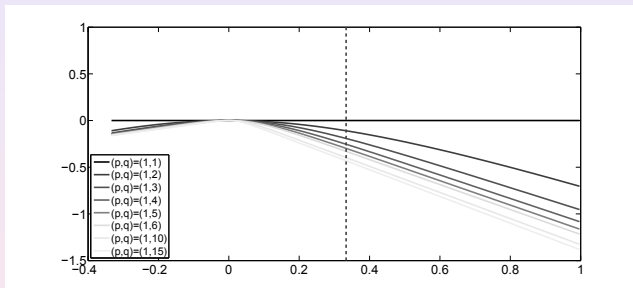


Рис. : Разность между левой и правой частью неравенства Минковского $\Delta M(p, q)$

Для кудита со спином $j = 3/2$

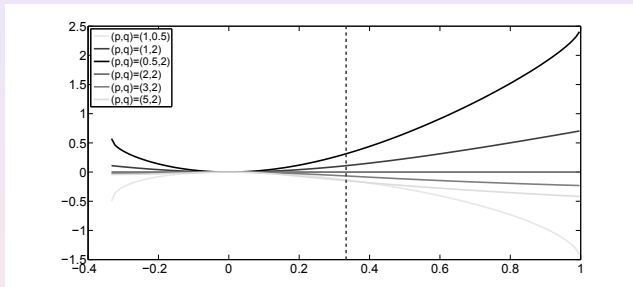


Рис. : Разность между левой и правой частью неравенства Минковского $\Delta M(p, q)$

Обсуждение и заключение

- 1 Неравенство типа Минковского с двумя параметрами было распространено на случай квантовых систем без подсистем. Новые неравенства, характеризующие запутанность, написаны для кудита, в частности для спина $j = 3/2$.
- 2 Полученные результаты были продемонстрированы на примере Вернеровского и X -состояния.

Список литературы

- E. A. Carlen, E. H. Lieb, A Minkowski Type Trace Inequality and Strong Subadditivity of Quantum Entropy II: Convexity and Concavity, Lett. Math. Phys., 83, 107, (2008), arXiv:0710.4167.
- V.N. Chernega, O.V. Man'ko, V.I. Man'ko, Generalized qubit portrait of the qutrit state density matrix, J. Russ. Laser Res., 34 , 4, (2013) 383–387.
- V. N. Chernega, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Minkovskii-type inequality for arbitrary density matrix of composite and noncomposite systems, (2014) arXiv:1406.5838.
- V.I. Man'ko and L.A. Markovich, Separability and entanglement of the qudit X-state with $j = 3/2$, arXiv:1404.1454, (2014).
- V.I. Man'ko and L.A. Markovich New Minkowski type inequalities and entropic inequalities for quantum states of qudits, (submitted in International Journal of Quantum Information)(2014)