

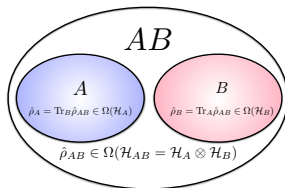
# Томографический дискорд для двухкубитных состояний

А.К. Федоров, Е.О. Киктенко, О.В. Манько, В.И. Манько

Е.О.К., А.К.Ф., Phys. Lett. A 378, 1704 (2014), [arXiv:1308.4948](#);  
А.К.Ф., Е.О.К., О.В.М., В.И.М., Submitted (2014), [arXiv:1409.5265](#).

57-ая научная конференция МФТИ  
Секция «Теоретическая физика»

Рассмотрим двусоставную систему  $AB$

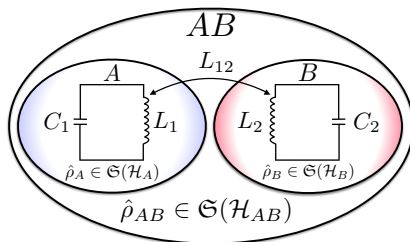


Основные соотношения квантовой теории информации:

$$S_X \equiv S(\hat{\rho}_X) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_X \log \hat{\rho}_X), \quad X \in \{A, B, AB\}.$$

$$I_{AB} = S_A + S_B - S_{AB}, \quad \mathcal{J}_A = S_B - S(\rho_B | \rho_A) \quad (1)$$

Мы ограничиваемся рассмотрением конечномерных гильбертовых пространств  $\dim \mathcal{H}_X < \infty$ .



- двухуровневые атомы;
- спины с  $X\bar{Y}$ -гамильтонианом в магнитном поле;
- сверхпроводящие цепи и т.д.

Квантовый дискорд — это мера неклассических корреляций между подсистемами квантовой системы, включая корреляции, которые не обусловлены запутанностью:

## Определение

Квантовый дискорд определяется как:

$$D^{(B)} = I - \max_{\{\Pi_b\}} J_{\{\Pi_b\}}^{(B)} \geq 0, \quad (2)$$

где  $J_{\{\Pi_b\}}^{(B)}$  — классическая взаимная информация, вычисленная для состояния

$$\rho_{AB}^{(B)} = \sum_b M_b \rho_{AB} M_b^\dagger, \quad \Pi_b = M_b^\dagger M_b.$$

Здесь  $\Pi_b$  — это (POVM) в пространстве  $\mathcal{H}_B$ .

# Двусоставные квантовые системы: томография

Томограмма квантового состояния может быть введена следующим образом:

$$\mathcal{T}(U) = \{\mathcal{T}_m(U)\} = \left\{ \langle m | U \hat{\rho} U^\dagger | m \rangle \right\}, \quad \mathcal{T}_m(U) \geq 0, \quad \sum_m \mathcal{T}_m(U) = 1.$$

где  $\{|m\rangle\}$  — полный набор ортонормированных векторов, представляющих измерительный базис,  $U \in \text{SU}(N)$  — унитарная матрица.

В томографическом представлении двучастичная система описывается как

$$\mathcal{T}_{AB}(U_A \otimes U_B) = \left\{ \mathcal{T}_{ABij}(U_A \otimes U_B) \right\},$$

операторы  $U_A$  и  $U_B$  описывают локальные проективные измерения подсистем  $A$  и  $B$ .

Томограммы подсистем принимаю вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_A(U_A) &= \{\mathcal{T}_{A_i}(U_A)\} = \left\{ \sum_j \mathcal{T}_{AB_{ij}}(U_A \otimes U_B) \right\}, \\ \mathcal{T}_B(U_B) &= \{\mathcal{T}_{B_j}(U_B)\} = \left\{ \sum_i \mathcal{T}_{AB_{ij}}(U_A \otimes U_B) \right\}.\end{aligned}$$

Следовательно, можно ввести энтропию Шеннона, связанную с томограммой  $\mathcal{T}(U)$ :

$$H(U) = - \sum_m \mathcal{T}_m(U) \log \mathcal{T}_m(U). \quad (3)$$

Аналогично, определяем томографическую взаимную информацию:

$$J(U_A, U_B) = H_A(U_A) + H_B(U_B) - H_{AB}(U_A \otimes U_B), \quad (4)$$

Томографическая версия квантового дискорда:

$$D(U_A, U_B) = I - J(U_A, U_B). \quad (5)$$

- величина  $D(U_A, U_B)$  зависит от  $U_A$  и  $U_B$ ;
- уровень наблюдаемых корреляций зависят от  $U_A$  и  $U_B$ ;
- различные процедуры определения  $U_A$  и  $U_B$ .

Базовый подход к выбору  $U_A$  и  $U_B$  следует из определения симметричного дискорда:

$$(U_A^{\text{opt}}, U_B^{\text{opt}}) = \arg \max_{U_A, U_B} J(U_A, U_B). \quad (6)$$

В результате, томограмма имеет вид:

$$\mathcal{T}_{AB}^{\text{opt}} = \mathcal{T}_{AB} (U_A^{\text{opt}} \otimes U_B^{\text{opt}}). \quad (7)$$

При этом величина принимает минимально возможное значение:

$$D^{\text{opt}} = I - J^{\text{opt}}, \quad J^{\text{opt}} = J(U_A^{\text{opt}}, U_B^{\text{opt}}) \quad (8)$$



Можно выбрать  $U_A$  и  $U_B$  так, чтобы матрицы плотности подсистем после действия  $U_A$  и  $U_B$  становились бы диагональными в измерительном базисе.

В таком случае, энтропии Шеннона и фон Неймана равны

$$H_A \left( \tilde{U}_A^{\text{diag}} \right) = S_A, \quad H_B \left( \tilde{U}_B^{\text{diag}} \right) = S_B. \quad (9)$$

$$\left( U_A^{\text{diag}}, U_B^{\text{diag}} \right) = \arg \max_{\tilde{U}_A^{\text{diag}}, \tilde{U}_B^{\text{diag}}} J \left( \tilde{U}_A^{\text{diag}}, \tilde{U}_B^{\text{diag}} \right), \quad (10)$$

$$\mathcal{T}_{AB}^{\text{diag}} = \mathcal{T}_{AB} \left( U_A^{\text{diag}} \otimes U_B^{\text{diag}} \right). \quad (11)$$

$$D^{\text{diag}} = I - J^{\text{diag}} = H_{AB}(U_A^{\text{diag}} \otimes U_B^{\text{diag}}) - S_{AB}. \quad (12)$$

Эта величина известна как вызванное измерением возмущение (measurement-induced disturbance).

Дополнительный подход:

$$\mathcal{T}_A \left( \tilde{U}_A^{\text{sym}} \right) = \mathcal{T}_B \left( \tilde{U}_B^{\text{sym}} \right) = \{1/2, 1/2\}.$$

Максимизация энтропии Шеннона:

$$H_A \left( \tilde{U}_A^{\text{sym}} \right) = H_B \left( \tilde{U}_B^{\text{sym}} \right) = 1.$$

Максимизация томографической взаимной информации:

$$(U_A^{\text{sym}}, U_B^{\text{sym}}) = \arg \max_{\tilde{U}_A^{\text{sym}}, \tilde{U}_B^{\text{sym}}} J \left( \tilde{U}_A^{\text{sym}}, \tilde{U}_B^{\text{sym}} \right), \quad (13)$$

Наконец,

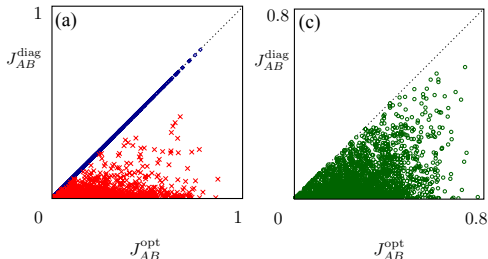
$$D^{\text{sym}} = I - J^{\text{sym}} = I + H_{AB}(U_A^{\text{sym}} \otimes U_B^{\text{sym}}) - 2. \quad (14)$$

Мы рассматриваем  $X$ -состояния

$$\rho_{AB}^X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{14} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Ограничения на матричные элементы  $\{\rho_{ij}\}$ : (i) все диагональные элементы неотрицательны; (ii) выполнены неравенства

$$\rho_{23}^2 \leq \rho_{22}\rho_{33}, \quad \rho_{14}^2 \leq \rho_{11}\rho_{44}.$$



(i) первый подкласс (ромбы):

$$D^{\text{opt}} = D^{\text{diag}},$$

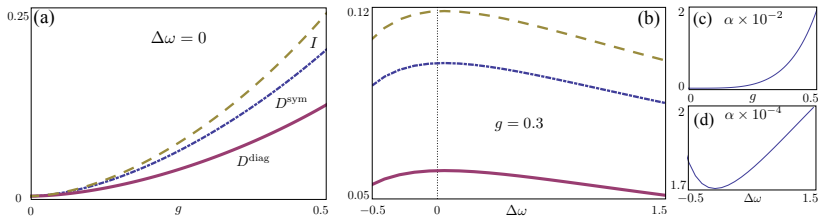
(ii) второй подкласс (крестики):

$$D^{\text{opt}} < D^{\text{diag}}, \quad \mathcal{T}_{AB}^{\text{opt}} = \mathcal{T}_{AB}^{\text{sym}}.$$

Таким образом, верна следующая формула

$$D^{\text{opt}} = \min(D^{\text{diag}}, D^{\text{sym}}). \quad (16)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2 + \hat{V}, \quad \hat{V} = L_{12}\hat{I}_1\hat{I}_2, \quad [\hat{I}_i, \hat{Q}_i] = i\hbar/L_i, \quad (17)$$



Спасибо за внимание!

To generate  $X$ -state density matrix (15), we use the following algorithm. First, we generate the diagonal elements as follows:

$$\rho_{ii} = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^4 p_j}, \quad p_i = \mathcal{U}(0, 1),$$

where  $\mathcal{U}(a, b)$  stands for uniform distribution on  $[a, b]$ .

Then we generate off-diagonal elements as:

$$\rho_{14} = \epsilon_1 \sqrt{\rho_{11} \rho_{44}}, \quad \rho_{23} = \epsilon_2 \sqrt{\rho_{22} \rho_{33}}, \quad \epsilon_1, \epsilon_2 = \mathcal{U}(0, 1).$$

We note that this straightforward algorithm does not generate states uniformly in respect to the Haar measure, but that is not crucial for our purposes.

# Generation of random arbitrary two-qubit mixed states

We generate arbitrary two qubit states in the following form:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{\sum_{j=1}^4 p_j} \sum_{k=1}^4 p_k \langle \psi_k | \psi_k \rangle^{-1} |\psi_k\rangle \langle \psi_k|,$$

where,

$$|\psi_k\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathcal{N}(0, 1) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathcal{N}(0, 1) \end{pmatrix}, \quad p_j = \mathcal{U}(0, 1),$$

with  $i^2 = -1$  and  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  being the Gaussian distribution with the expectation value  $\mu$  and the standard deviation  $\sigma$ .