# Динамика квантовой сцепленности в бозонных гауссовских каналах

С.Н. Филиппов

57-я научная конференция МФТИ
Секция теоретической физики

Москва
25 ноября 2014 г.

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\mathbf{H} = 0$$

Граничные условия: $\mathbf{E}_{\|} = 0$

$$\mathbf{H}_{\perp} = 0$$

# Моды

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\sum_l \sqrt{\frac{4\pi}{V_l}}\,\dot{q}_l(t)\,\mathbf{u}_l(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sum_l \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V_l}}\,q_l(t)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_l(\mathbf{r}),$$

где

$$\triangle\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) + k_l^2\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) = 0$$

$$\int \mathbf{u}_l^2(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = V_l \qquad \mathbf{u}_{l\,||}(\mathbf{r}) = 0$$

$$\ddot{q}_l(t) + \omega_l^2 q_l(t) = 0 \qquad \omega_l = ck_l$$

$$\int \big(\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{l'}(\mathbf{r})\big) d^3\mathbf{r} = 0$$

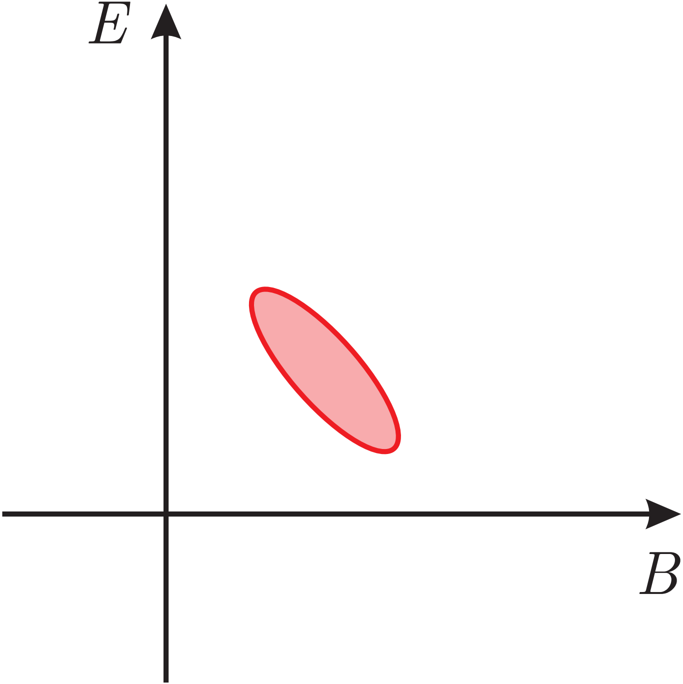
$$\mathcal{E} = \int \big(\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t) + \mathbf{H}^2(\mathbf{r},t)\big)/8\pi d^3\mathbf{r} = \sum_l \tfrac{1}{2}(\dot{q}_l^2 + \omega_l^2 q_l^2)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) &= i\sum_l \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_l}{V_l}}\,\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \left(\hat{a}_l(t) - \hat{a}_l^\dagger(t)\right) \\
&= -\sum_l \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_l}{V_l}}\,\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \hat{P}_l(t) \\
\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) &= \sum_l \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_l V_l}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_l(\mathbf{r}) \left(\hat{a}_l(t) + \hat{a}_l^\dagger(t)\right) \\
&= \sum_l \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{\omega_l V_l}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_l(\mathbf{r})\,\hat{Q}_l(t)
\end{aligned}$$

# Примеры

- Фоковские состояния
- Когерентные состояния
- Сжатые состояния

- Смешанные состояния:
  – Тепловые состояния

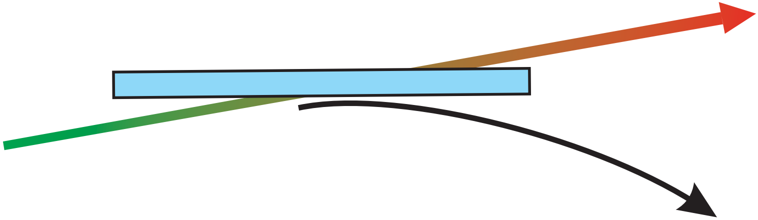

$E$
$B$

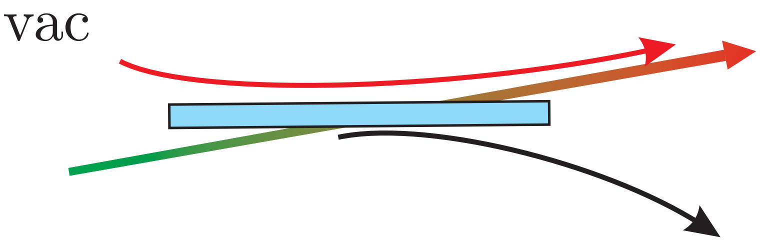
# Примеры

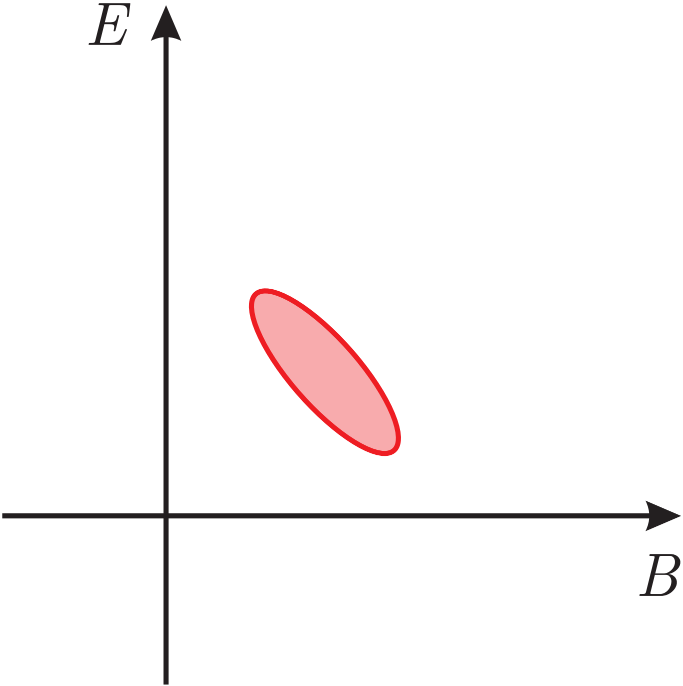
- Фоковские состояния
- Когерентные состояния
- Сжатые состояния

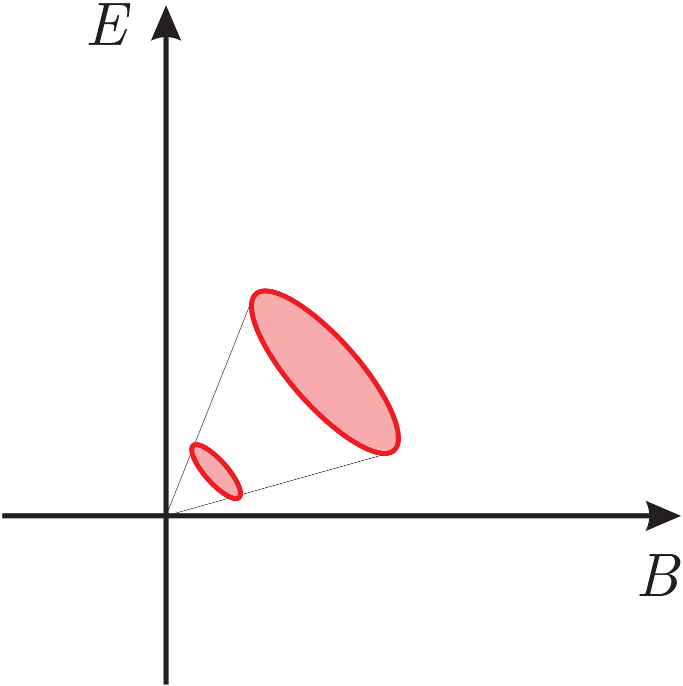
- Смешанные состояния:
  – Тепловые состояния

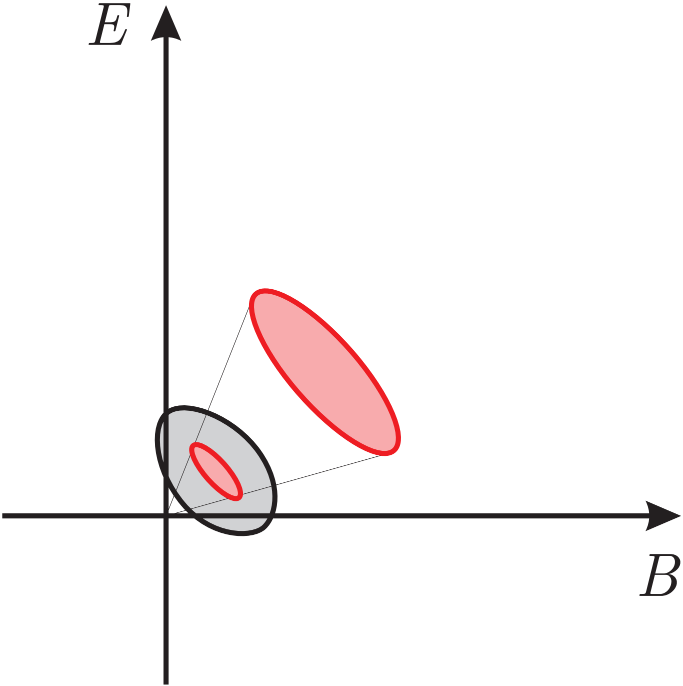
# Неунитарная динамика



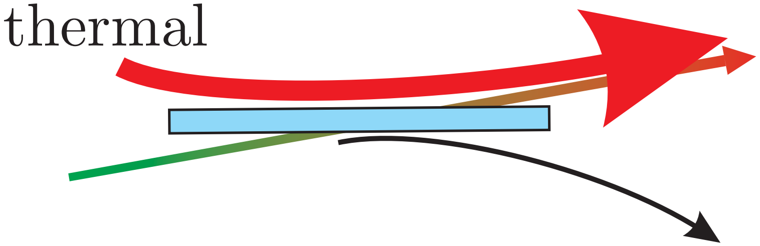

vac

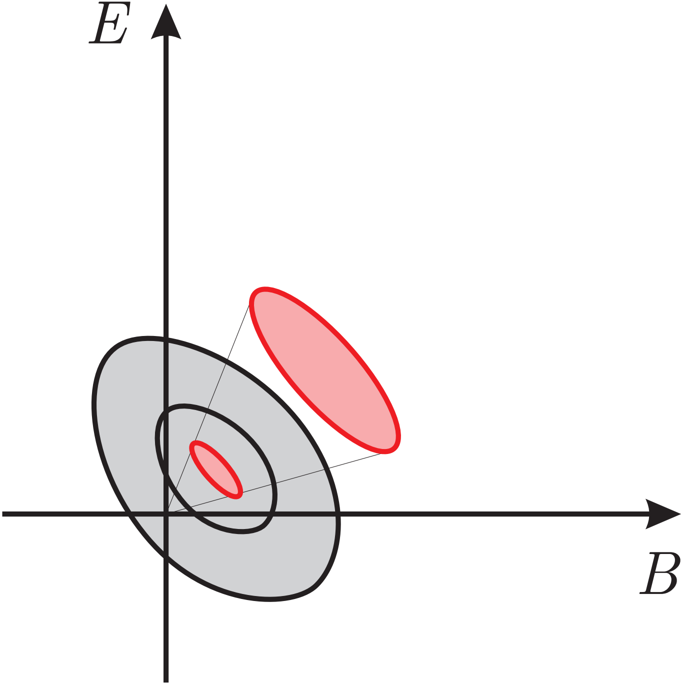

E
B

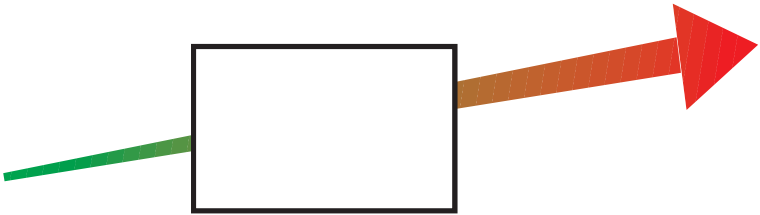

E
B

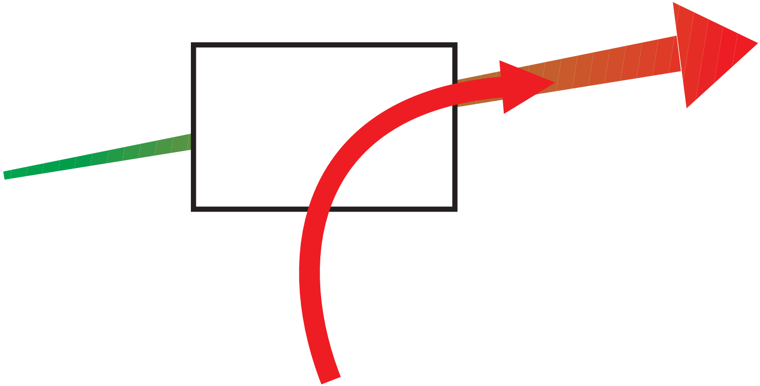


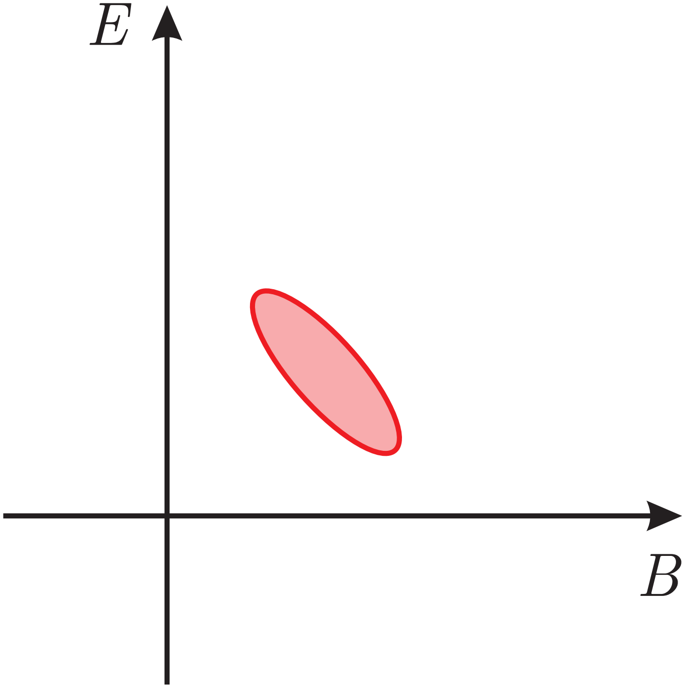
E
B

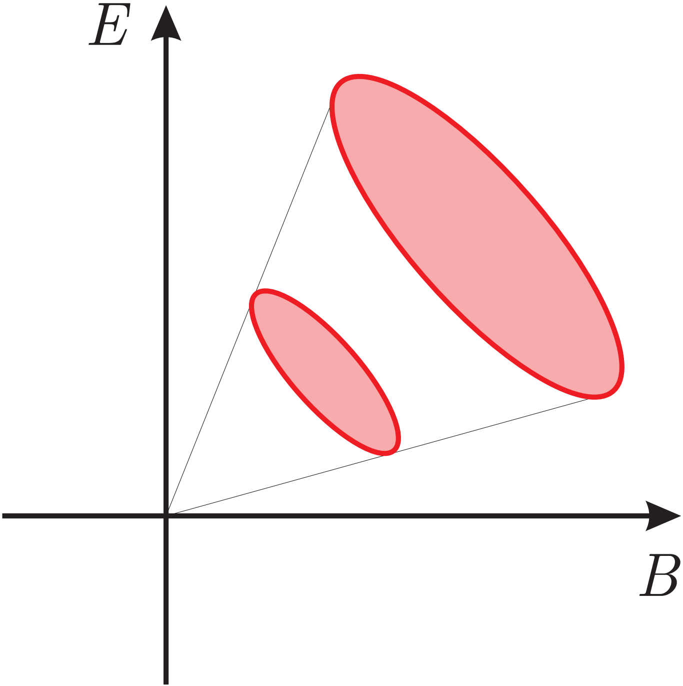

thermal

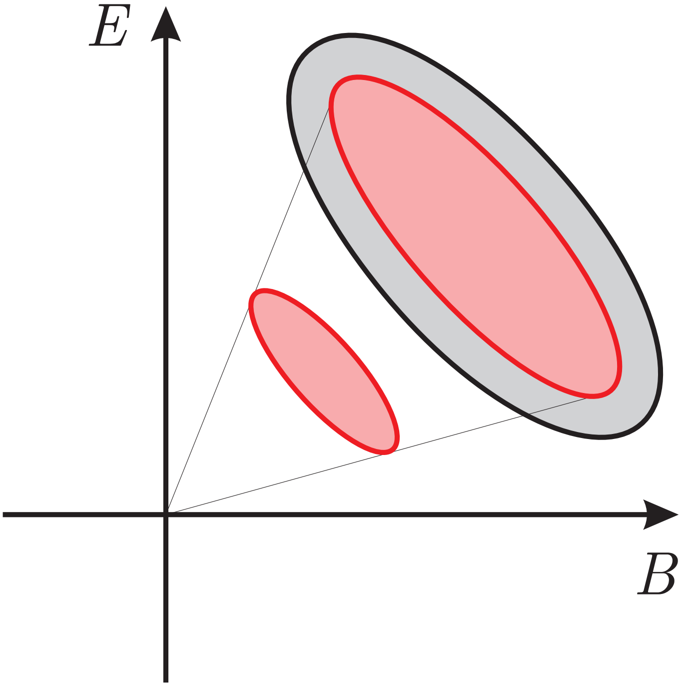

E
B





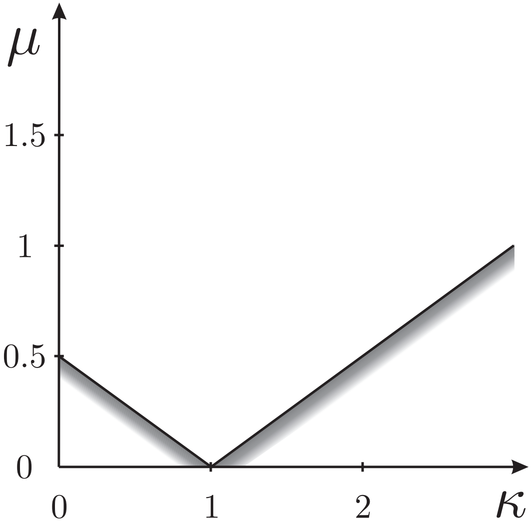

$E$
$B$


E
B



$E$
$B$

# Квантовые каналы: аттенюатор и усилитель



# Описание состояний

Характеристическая функция $\varphi(\mathbf{z}) = \mathrm{tr}[\varrho W(\mathbf{z})]$

- Оператор Вейля
  $W(\mathbf{z}) = \exp[i(q_1 x_1 + p_1 y_1 + \cdots + q_N x_N + p_N y_N)]$
- число мод $N$
- каноническое коммутационное соотношение
  $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$
- координаты в вещественном симлпектическом пространстве
  $\mathbf{z} = (x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N)^\top$
- симплектическая форма $\boldsymbol{\Delta} = \bigoplus_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

# Описание каналов

$$\varphi_{\mathrm{out}}(\mathbf{z}) = \varphi_{\mathrm{in}}(\mathbf{Kz}) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^\top \mathbf{Mz}\right)$$

$$\mathbf{K} = \sqrt{\kappa}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \mu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- аттенюатор $(0 < \kappa < 1)$
- добавочный классический шум $(\kappa = 1)$
- усилитель $(\kappa > 1)$

Каналы (вполне положительные отображения): $\mu \geq \frac{1}{2}|\kappa - 1|$

Квантовое ограничение: $\mu_{\mathrm{QL}} = \frac{1}{2}|\kappa - 1|$

Добавочный шум: $a = \mu - \mu_{\mathrm{QL}} \geq 0$

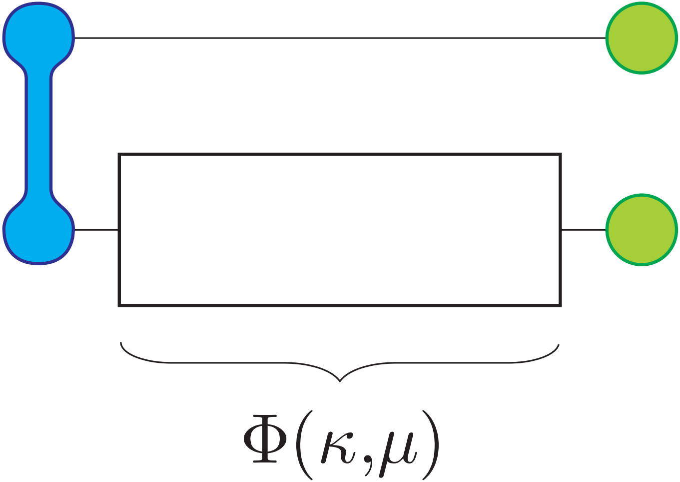
# Динамика сцепленности двух мод излучения


Bob
entanglement
Alice

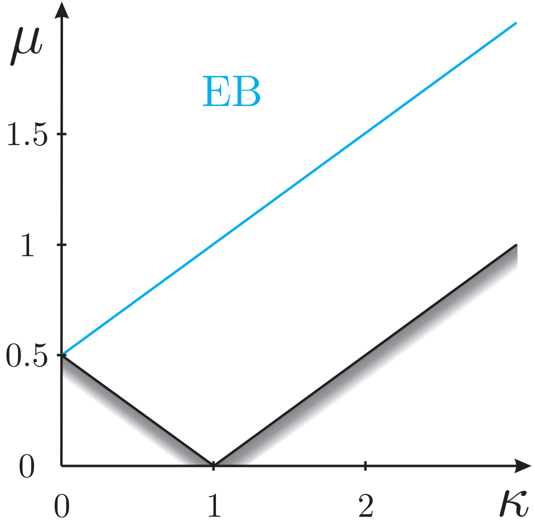

Alice
entanglement
Bob


entanglement
Bob
Alice

# Известный случай:

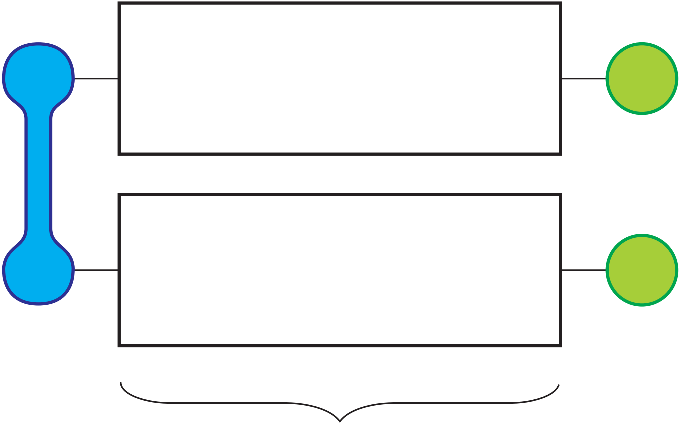


# Каналы, разрушающие сцепленность



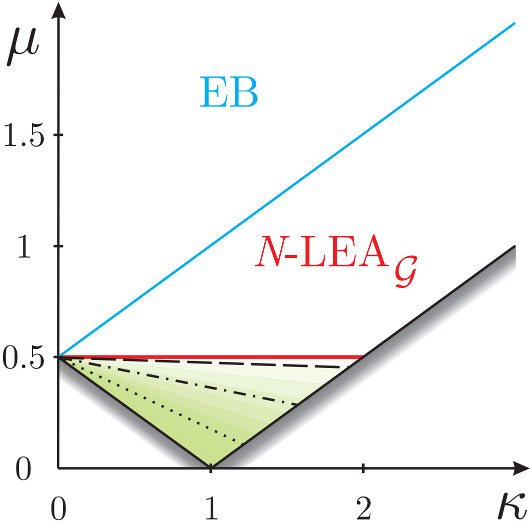
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & \sinh 2r & 0 \\ 0 & \cosh 2r & 0 & -\sinh 2r \\ \sinh 2r & 0 & \cosh 2r & 0 \\ 0 & -\sinh 2r & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix}.$$

# Мы изучаем:



$$\Phi(\kappa,\mu)$$

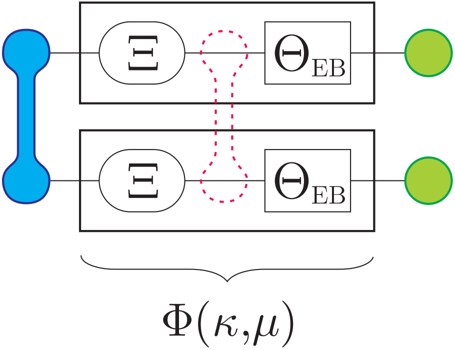
# $N$-локальный аттенюатор и усилитель: гауссовские состояния



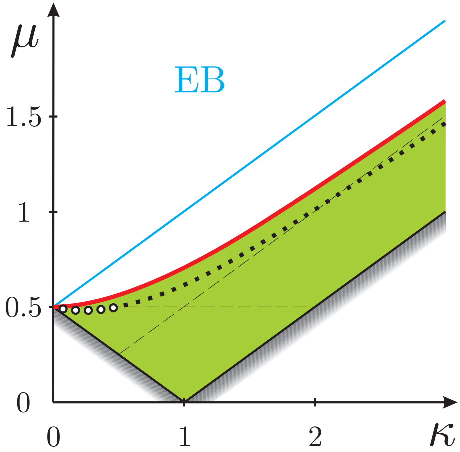
# $N$-локальный аттенюатор и усилитель: гауссовские состояния

**Предложение**. Канал $\Phi(\kappa, \mu)$ принадлежит классу $N$-LEA$_{\mathcal{G}}$ тогда и только тогда, когда общий уровень шума $\mu \geq \frac{1}{2}$.

*Доказательство*.



# 2-локальный аттенюатор и усилитель: негауссовские состояния




**Предложение**. Канал $\Phi(\kappa,\mu) \in \mathcal{C}$ не является $N$-LEA для всех $N = 2, 3, \ldots$, если общий уровень шума $\mu < \frac{1}{2}\sqrt{\kappa^2 + 1}$.

Входное состояние:

$$|\psi\rangle \propto |\gamma\rangle|0\rangle - |0\rangle|\gamma\rangle$$

Свидетель сцепленности:

$$W_\lambda = \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi} e^{\lambda(|\alpha|^2+|\beta|^2)}|\alpha\rangle\langle\beta| \otimes |\beta\rangle\langle\alpha|$$

# Заключение

- Найдены ограничения на интенсивности шумов, приводящих к уничтожению сцепленности гауссовских и негауссовских состояний.
- Показано, что ковариантные каналы $\Phi_1 \otimes \Phi_2 \otimes \ldots \Phi_N$ с коэффициентом усиления $\kappa_i \geq 2$ ($\approx 3$ dB, $i = 1, \ldots, N$) разрушают сцепленность любого $N$-модового гауссовского состояния даже в случае квантового ограничения.
- Низкоэнергетические негауссовские состояния специального вида остаются запутанными в большом диапазоне шумов для любого значения коэффициента усиления.

Спасибо за внимание!