УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ 2D СИСТЕМ

Емельянова Юлия Павловна

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (физико-математические науки)

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Пакшин П. В.

Нижний Новгород - 2014

Актуальность

1. 2D системы:
   - системы Роессера (задачи обработки изображений);
   - системы Форназини-Маркезини (задачи синтеза сложных цифровых фильтров);
   - повторяющиеся процессы (задачи робототехники).

Пример 1

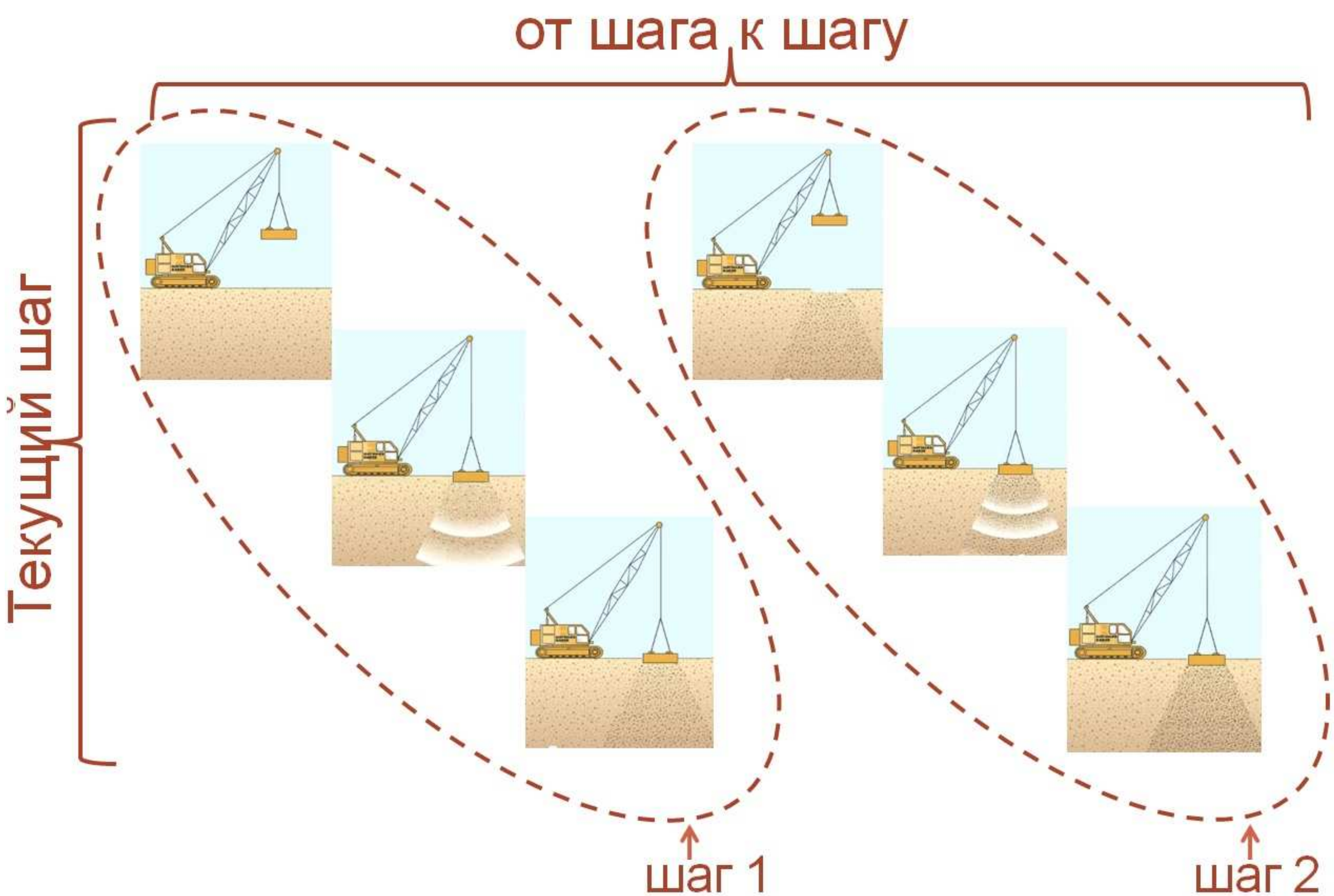


Рис. 1: Уплотнение грунта

Пример 2

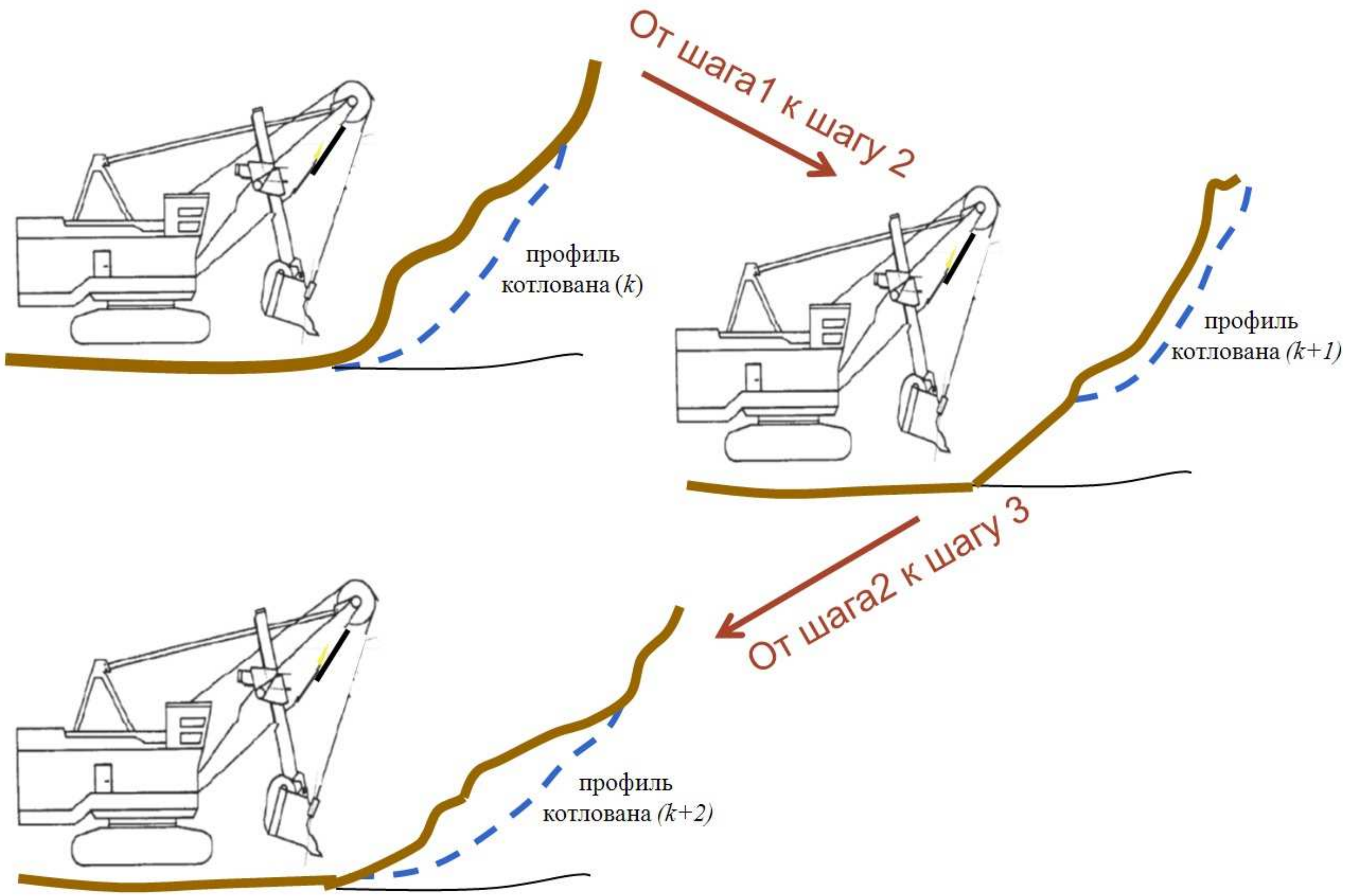


Рис. 2: Выемка грунта

Пример 3

Рис. 3: Реабилитация больных

video

Актуальность

2. Подавляющее большинство работ посвящено исследованию линейных 2D систем с постоянными параметрами;

3. Работы, связанные с изучением устойчивости нелинейных 2D систем, стали появляться совсем недавно;

4. Почти не рассматривались задачи стабилизации нелинейных 2D систем;

5. Востребованность развития теории для задач управления с итеративным обучением.

Цель работы

- **Получить конструктивные условия устойчивости и стабилизации различных классов нелинейных и нестационарных 2D систем;**
- **Применить полученные результаты к задачам управления с итеративным обучением в условиях неопределенности и возможных нарушений.**

Задачи

1. **Развить метод функций Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных 2D систем.**

2. **Развить метод функций накопления для исследования пассивности нелинейных 2D систем и решения задач стабилизации.**

3. **Применить полученные результаты к задачам управления с итеративным обучением в условиях нестационарных неопределенностей и возможных информационных нарушений.**

Методы исследования

- **Основной метод исследования — нестандартное развитие метода векторных функций Ляпунова и дивергентного подхода**
- **Для исследования пассивности предлагается использовать метод векторных функций накопления.**

Основные результаты, выносимые на защиту

1. **Условия экспоненциальной устойчивости в терминах свойств оператора дивергенции векторных функций Ляпунова или его дискретного аналога для различных классов нелинейных 2D систем.**

2. **Условия пассивности нелинейных дискретных повторяющихся процессов в терминах свойств аналога оператора дивергенции векторных функций накопления и решение на основе этих условий задачи стабилизации указанных систем управлением с обратной связью.**

3. **Метод синтеза алгоритмов управления с итеративным обучением в условиях неопределенности и возможных нарушений на основе предложенных условий устойчивости и стабилизации.**

Модель Роессера

Нелинейная дискретная $2D$ система, описываемая моделью Роессера

$$\begin{aligned} h(i+1,j) &= f_1(h(i,j), v(i,j), u(i,j)) \\ v(i,j+1) &= f_2(h(i,j), v(i,j), u(i,j)) \\ z(i,j) &= g(h(i,j), v(i,j), u(i,j)). \end{aligned}$$

где f_1, f_2 – n-мерные нелинейные функции такие, что $f_1(0,0,0) = f_2(0,0,0) = 0$

Модель Форназини-Маркезини

Нелинейная дискретная 2D система, описываемая моделью Форназини-Маркезини

$$x_{k+1,t+1} = f_1(x_{k,t+1}) + f_2(x_{k+1,t}), \quad k,\ t = 0,\ 1, \ldots,$$

где x – n-мерный вектор состояния;

f_1, f_2 – нелинейные векторные функции, удовлетворяющие требованию $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$.

Модель в форме повторяющегося процесса

Нелинейный дискретный повторяющийся процесс

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t+1) &= f_1(x_{k+1}(t), y_k(t)), \\ y_{k+1}(t) &= f_2(x_{k+1}(t), y_k(t)), \\ 0 \le t &\le T,\ k = 0, 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{1}$$

где k – номер повторения, t – дискретное время на k-м повторении,

$x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния текущего повторения,

$y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор профиля повторения,

f_1 и f_2 – нелинейные функции такие, что $f_1(0, 0, 0) = 0$, $f_2(0, 0, 0) = 0$.

Граничные условия

- Граничные условия предполагаются заданными в виде

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}(0) &= d_{k+1},\ k \geq 0, \\
y_0(t) &= f(t),\ 0 \leq t \leq T, \\
y_0(t) &= 0,\ t > T,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где d_{k+1} и $f(t)$ – известные векторы размерности $n_x \times 1$ и $n_y \times 1$ соответственно.

- Граничные условия удовлетворяют неравенствам

$$
|f(t)|^2 \leq M_f,\ |d_{k+1}|^2 \leq \kappa_d z_d^{k+1},\ k = 0, 1, \ldots, \tag{3}
$$

где $M_f > 0$, κ_d – некоторые конечные действительные числа и $0 < z_d < 1$.

Устойчивость по профилю повторения

Определение 1 *Система* (1) *называется экспоненциально устойчивой по профилю повторения, если для любых граничных условий, удовлетворяющих* (35)

$$||y_k|| \leq \kappa z^k, \quad 0 < z < 1, \tag{4}$$

где $||y_k|| = \sqrt{\sum_{t=0}^{T} |y_k(t)|^2}$, κ *зависит от длины профиля повторения* T *и* z *зависит от* z_d.[a]

---

[a] Rogers E., Galkowski K., Owens D.H. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes* // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. – 2007. – Vol. 349. – 466 p.

Метод векторной функции Ляпунова

- **Рассмотрим векторную функцию Ляпунова**

$$\vec{V}(x,y) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t) \\ V_2(y_k(t)) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $V_1(x) > 0,\ x \neq 0,\ V_2(y) > 0,\ y \neq 0,\ V_1(0) = 0,\ V_2(0) = 0.$

- **Определим оператор дивергенции в силу системы** (1)

$$\mathcal{D}\vec{V}(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \Delta_t V_1(x_{k+1}(t)) + \Delta_k V_2(y_k(t)), \tag{6}$$

где $\Delta_t V_1(x_{k+1}(t)) = V_1(x_{k+1}(t+1)) - V_1(x_{k+1}(t)$ **и**
$\Delta_k V_2(y_k(t)) = V_2(y_{k+1}(t)) - V_2(y_k(t)$.

Теорема об устойчивости

Теорема 1 *Рассмотрим систему (1) с граничными условиями, удовлетворяющими (35) и предположим, что существуют положительные константы* c_1, c_2, c_3 *такие, что функция (37) и ее оператор* $\mathcal{D}$ *(38) вдоль траекторий системы (1) удовлетворяет неравенствам*

$$c_1|x_{k+1}(t)|^2 \leq V_1(x_{k+1}(t)) \leq c_2|x_{k+1}(t)|^2, \tag{7}$$

$$c_1|y_k(t)|^2) \leq V_2(y_k(t)) \leq c_2|y_k(t)|^2, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}\vec{V}(x_{k+1}(t), y_k(t)) \leq -c_3(|x_{k+1}(t)|^2 + |y_k(t)|^2). \tag{9}$$

Тогда система (1) экспоненциально устойчива по профилю повторения.

Доказательство

Доказательство 1 *Из* (7), (8) *и* (9) *следует, что*

$$V_1(x_{k+1}(t+1) \leq \lambda V_1(x_{k+1}(t)) + \lambda V_2(y_k(t)) - V_2(y_{k+1}(t)), \qquad (10)$$

где $\lambda = 1 - \frac{c_3}{c_2} \in (0,1)$.

Решая неравенство (10) *относительно* $V_1(x_{k+1}(t))$, *получим*

$$V_1(x_{k+1}(t)) \leq V_1(x_{k+1}(0))\lambda^t + \sum_{p=0}^{t-1}[\lambda V_2(y_k(p)) - V_2(y_{k+1}(p))]\lambda^{t-p-1}. \quad (11)$$

Обозначим

$$H_k(t) = \sum_{p=0}^{t} V_2(y_k(t))\lambda^{t-p}.$$

Тогда из (11), (7) *и* (35) *следует, что*

$$H_{k+1}(t) \leq \lambda H_k(t) + \lambda^{t+1} V_1(x_{k+1}(0)) \leq \lambda H_k(t) + \lambda^{t+1} c_2 \kappa_d z_d^{k+1}. \qquad (12)$$

Решая неравенство (12), приходим к соотношению

$$H_k(t) \leq \lambda^k H_0(t) + \lambda^{t+1} c_2 \kappa_d \sum_{i=1}^{k} z_d^i \lambda^{k-i}. \tag{13}$$

Мажорируя правую часть (13), окончательно имеем

$$H_k(t) \leq z^k \left(H_0 + \frac{c_2 \kappa_d \lambda^{t+1}}{1 - \zeta} \right), \tag{14}$$

где $z = \max\{\lambda, \zeta\}$, $\zeta = \bar{z}^{\frac{1}{2}}$, $\bar{z} = \max\{z_d, \lambda\}$.

Обозначая $t = T$ *и с учетом (8) легко убеждаемся, что выполняется (4). Теорема доказана.*

Экспоненциальная устойчивость нелинейных повторяющихся процессов с возможными нарушениями

Нелинейный повторяющийся процесс

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t+1) &= \varphi_1(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t)), \\ y_{k+1}(t) &= \varphi_2(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t)), \end{aligned} \tag{15}$$

где $r(t)$ $(t \geq 0)$ **– нарушения,**

φ_1 **и** φ_2 **– нелинейные функции такие, что для любых** $r \in \mathbb{N}$
$\varphi_1(0, 0, r) = 0,\ \ \varphi_2(0, 0, r) = 0.$

Нарушения моделируются однородной марковской цепью с конечным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \nu\}$ **и вероятностями перехода**

$$\mathbf{P}(r(t+1) = j \mid r(t) = i) = \pi_{ij}, \tag{16}$$

Устойчивость по профилю повторения

Определение 2 *Система (15) называется экспоненциально устойчивой по профилю повторения в среднем квадратическом, если для любых граничных условий (2), удовлетворяющих (35) существуют постоянные* $\kappa > 0$ *и* $0 < z < 1$ *такие, что*

$$||y_k||_E \leq \kappa z^k, \tag{17}$$

где $||y_k||_E = \sqrt{E\sum_{t=0}^{T} |y_k(t)|^2}$, E *– оператор математического ожидания.*

Метод векторной функции Ляпунова

- Рассмотрим векторную функцию Ляпунова

$$\vec{V}(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \\ V_2(y_k(t), r(t)) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где $V_1(x,r) > 0$, $x \neq 0$, $V_2(y,r) > 0$, $y \neq 0$, $V_1(0,r) = 0$, $V_2(0,r) = 0$.

- Введем операторы $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{D}_k$ вдоль траекторий системы (15):

$$\mathcal{D}_t\vec{V}(\xi,\eta,i) = \mathbf{E}[V_1(x_{k+1}(t+1), r(t+1) - V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \mid \\ x_{k+1}(t) = \xi, y_k(t) = \eta_k, r(t) = i],$$

$$\mathcal{D}_k\vec{V}(\xi,\eta,i) = \mathbf{E}[V_2(y_{k+1}(t), r(t)) - V_2(\eta_k, i) \mid \\ x_{k+1}(t) = \xi_{k+1}, y_k(t) = \eta_k, r(t) = i]$$

и определим оператор $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}\vec{V}(\xi,\eta,i) = \mathcal{D}_t\vec{V}(\xi,\eta,i) + \mathcal{D}_k V(\xi,\eta,i). \tag{19}$$

Теорема об устойчивости

Теорема 2 *Рассмотрим нелинейный повторяющийся процесс* (15), (16) *с граничными условиями* (2), *удовлетворяющими* (35). *Предположим, что существуют положительные постоянные* $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{c_3}$ *такие, что функция* (18) *и ее оператор* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ (19) *вдоль траекторий системы* (15), (16) *удовлетворяет неравенствам*

$$c_1|\xi|^2 \leq V_1(\xi, i) \leq c_2|\xi|^2, \tag{20}$$

$$c_1|\eta|^2) \leq V_2(\eta, i) \leq c_2|\eta|^2, \tag{21}$$

$$\mathcal{D}\vec{V}(\xi, \eta, i) \leq -c_3(|\xi|^2 + |\eta|^2), \tag{22}$$

$\mathbf{i} \in \mathbb{N}$. *Тогда повторяющийся процесс* (15), (16) *экспоненциально устойчив по профилю повторения в среднем квадратическом.*

Экспоненциальная устойчивость непрерывных систем Роессера

Нелинейная непрерывная модель Роессера[a]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} h(t_1, t_2) &= f_1(h(t_1, t_2), v(t_1, t_2), t_1, t_2), \\ \frac{\partial}{\partial t_2} v(t_1, t_2) &= f_2(h(t_1, t_2), v(t_1, t_2), t_1, t_2) \end{aligned} \tag{23}$$

где $h \in \mathbb{R}^{n_h}$ **и** $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ **— горизонтальная и вертикальная компоненты вектора состояния,**

f_1 **и** f_2 **— нелинейные функции такие, что** $f_1(0, 0, t_1, t_2) = 0$, $f_2(0, 0, t_1, t_2) = 0$.

---

[a] Дымков М. П. К задаче оптимизации режимов функционирования сорбционных аппаратов. Научные Труды БГЭУ: Юбилейный сборник.- Минск: БГЭУ. – 2013. – вып. 6 – с. 104–116.

Граничные условия

Граничные условия

$$v(t_1, 0) = \hat{v}(t_1) \text{ для любого } t_1 \geq 0,$$

$$h(0, t_2) = \hat{h}(t_2) \text{ для любого } t_2 \geq 0,$$

1.

$$|\hat{h}(t)| \leq M_1, \text{если } 0 \leq t \leq T_1; \quad \hat{h}(t) = 0, \text{если } t > T_1, \tag{24}$$

$$|\hat{v}(t)| \leq M_2, \text{если } 0 \leq t \leq T_2; \quad \hat{v}(t) = 0, \text{если } t > T_2. \tag{25}$$

2.

$$\begin{gathered} |\hat{h}(t)| \leq \kappa_1 \exp(-\varepsilon_1 t), \\ |\hat{v}(t)| \leq \kappa_2 \exp(-\varepsilon_2 t), \ \varepsilon_1 > 0, \ \varepsilon_2 > 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Экспоненциальная устойчивость

Определение 3 *Систему* (23) *назовем экспоненциально устойчивой, если при граничных условиях вида* (24), (25) *или* (26)

$$|\mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{t} - \boldsymbol{\tau})| + |\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{t} - \boldsymbol{\tau})| \le \boldsymbol{\beta} \exp(-\boldsymbol{\alpha} \mathbf{t}), \qquad (27)$$

$\boldsymbol{\alpha} > 0, \ \boldsymbol{\beta} > 0.$

Метод векторной функции Ляпунова

- **Рассмотрим векторную функцию**

$$V(h, v) = \begin{bmatrix} V_1(h) \\ V_2(v) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

где $h \in \mathbb{R}^{n_h}$, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$, $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$, $V_1(h) > 0$, $h \neq 0$, $V_2(v) > 0$, $v \neq 0$.

- **Для этой функции определим оператор дивергенции в силу системы**

$$\mathrm{div}V(h(t_1, t_2), v(t_1, t_2)) = \frac{\partial V_1(h(t_1, t_2))}{\partial t_1} + \frac{\partial V_2(v(t_1, t_2))}{\partial t_2}. \tag{29}$$

Теорема об устойчивости

Теорема 3 *Рассмотрим систему* (23) *с граничными условиями вида* (24), (25) *или* (26). *Пусть существуют положительные постоянные* $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, $\mathbf{c_3}$ *такие, что функция* (28) *и ее дивергенция* (29) *в силу системы удовлетворяют неравенствам*

$$\mathbf{c_1|h(t_1,t_2)|^2 \le V_1(h(t_1,t_2)) \le c_2|h(t_1,t_2)|^2}, \tag{30}$$

$$\mathbf{c_1|\nu(t_1,t_2)|^2 \le V_2(\nu(t_1,t_2)) \le c_2|\nu(s_1,s_2)|^2}, \tag{31}$$

$$\mathbf{\operatorname{div}V(h(t_1,t_2),\nu(t_1,t_2)) \le -c_3(|h(t_1,t_2)|^2 + |\nu(t_1,t_2)|^2)}. \tag{32}$$

Тогда система (23) *экспоненциально устойчива.*

Пасссивность нелинейных дискретных 2D систем

Нелинейный дискретный повторяющийся процесс

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t+1) &= f_1(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)),\\ y_{k+1}(t) &= f_2(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)),\\ z_{k+1}(t) &= g(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t)),\\ 0 \le t &\le T,\ k = 0, 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{33}$$

где $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния на текущем шаге повторения k,

$y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор профиля текущего повторения,

$z_k(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ — вспомогательный вектор для анализа и синтеза закона управления и

f_1, f_2 и g — нелинейные функции такие, что

$f_1(0, 0, 0) = 0,\ f_2(0, 0, 0) = 0,\ g(0, 0, 0) = 0.$

Граничные условия

- Граничные условия предполагаются заданными в виде

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}(0) &= d_{k+1}, \; k \geq 0, \\
y_0(t) &= f(t), \; 0 \leq t \leq T,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

где d_{k+1} и $f(t)$ – известные векторы размерности $n_x \times 1$ и $n_y \times 1$ соответственно.

- Граничные условия удовлетворяют неравенствам

$$
|f(t)|^2 \leq M_f, \; |d_{k+1}|^2 \leq \zeta_d \lambda_d^{k+1}, \; k = 0, 1, \ldots \tag{35}
$$

где $M_f > 0$ и $0 < \zeta_d < 1$ – некоторые конечные действительные числа.

Устойчивость

Определение 4 *Нелинейный повторяющийся процесс* (33) *и* (34), *где* $\mathbf{u} \equiv 0$, *называется экспоненциально устойчивым, если*

$$|x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2 \leq \kappa \zeta^{k+t}, \quad 0 < \zeta < 1, \tag{36}$$

где ζ *не зависит от* T.

Метод векторной функции накопления

- **Векторная функция накопления**

$$V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t)) \\ V_2(y_k(t)) \end{bmatrix}, \tag{37}$$

где $V_1(x) > 0,\ x \neq 0,\ \ V_2(y) > 0,\ y \neq 0,\ \ V_1(0) = 0,\ V_2(0) = 0.$

- **Оператор дивергенции этой функции вдоль траекторий системы** (1) **имеет вид**

$$\mathrm{div} V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \Delta_t V_1(x_{k+1}(t)) + \Delta_k V_2(y_k(t)), \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_t V_1(x_{k+1}(t)) &= V_1(x_{k+1}(t+1)) - V_1(x_{k+1}(t)), \\ \Delta_k V_2(y_k(t)) &= V_2(y_{k+1}(t)) - V_2(y_k(t)). \end{aligned}$$

G-пассивность

Определение 5 *Нелинейный дискретный повторяющийся процесс (1), (2) называется экспоненциально* $\mathbf{G}$*-пассивным, если существует векторная функция (37), скалярная функция* $S(x,y)$ *и положительные скаляры* c_1, c_2, c_3 *такие, что*

$$\begin{aligned} c_1|x|^2 &\leq V_1(x) \leq c_2|x|^2, \\ c_1|y|^2 &\leq V_2(y) \leq c_2|y|^2, \\ \mathrm{div}V(x_{k+1}(t), y_k(t)) &\leq z_{k+1}^T(t) G u_{k+1}(t) - S(x_{k+1}(t), y_k(t)), \\ S(x,y) &\geq c_3(|x|^2 + |y|^2), \end{aligned} \tag{39}$$

где $\mathbf{G}$ *— постоянная матрица соответствующего размера.*[a]

[a] Fradkov A. and Hill D. *Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlineaqr systems* // Automatica. – 1998. – Vol. 34, – P. 697–703.

Теорема о стабилизации

Теорема 4 *Пусть нелинейный дискретный повторяющийся процесс (1), (2) G-пассивен. Предположим также, что существует функция* $\varphi(z)$ *такая, что* $\varphi(0) = 0$ *и* $z^T G \varphi(z) > 0$, *если* $z \neq 0$. *Тогда система (1), (2) с законом управления*

$$u_{k+1}(t) = u(z_{k+1}(t)) = -\varphi(z_{k+1}(t)) \tag{40}$$

является экспоненциально устойчивой.

Пассивность и стабилизация

- **Рассмотрим случай, когда (33) имеет вид**

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) &= A_{11}x_{k+1}(t) + A_{12}y_k(t) + \phi_1(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t), \\ y_{k+1}(t) &= A_{21}x_{k+1}(t) + A_{22}y_k(t) + \phi_2(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t), \end{aligned} \tag{41}$$

- **Выберем функцию накопления в виде (37), где**

$$V_1(x_{k+1}(t)) = x_{k+1}^T(t)P_1x_{k+1}(t)$$

$$V_1(y_k(t)) = y_k^T(t)P_2y_k(t).$$

- $P_1 = P_1^T > 0$ **и** $P_2 = P_2^T > 0$ **удовлетворяют неравенству Ляпунова**

$$\bar{A}^TP\bar{A} - P + Q < 0, \tag{42}$$

где $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $P = P_1 \oplus P_2$, $Q > 0$.

Пассивность и стабилизация

- **Определим вспомогательный выходной вектор для (41) в виде**

$$z_{k+1}(t) = 2\phi^T(x_{k+1}(t), y_k(t))P\bar{A}[x_{k+1}^T(t)\ y_k^T(t)]^T + \\ +\phi^T(x_{k+1}(t), y_k(t))P\phi(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t), \quad (43)$$

- **Вычисляя дивергенцию векторной функции (37) получим**

$$\mathrm{div}V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = [x_{k+1}^T(t), y_k^T(t)](\bar{A}^T P\bar{A} - \\ -P)[x_{k+1}^T(t), y_k^T(t)]^T + z_{k+1}^T(t)u_{k+1}(t) \leq \quad (44) \\ \leq z_{k+1}^T(t)u_{k+1}(t) - [x_{k+1}^T(t), y_k^T(t)]Q[x_{k+1}^T(t), y_k^T(t)]^T$$

Пассивность и стабилизация

- **Из** (44) **следует, что система** (41)–(43) **G-пассивна при** $G = I$.
- **Тогда согласно теореме 4 закон управления**

$$u_{k+1}(t) = -[I + \phi^T(x_{k+1}(t), y_k(t))P\phi(x_{k+1}(t), y_k(t))]^{-1} \times \\ \times 2\phi^T(x_{k+1}(t), y_k(t))P\bar{A}[x_{k+1}^T(t), y_k^T(t)]^T,$$

обеспечит экспоненциальную устойчивость системы (41)–(45).

Управление с итеративным обучением. Модель объекта

$$
\begin{aligned}
x_i(t+1) &= A_i(\delta(t))x_i(t) + B_i(\delta(t))u_i(t) \\
y_i(t) &= C_i x_i(t),\ i = 1, 2, ..., N,\ 0 \le t \le T
\end{aligned}
\tag{46}
$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния i-й системы,

$u_i \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления i-й системы,

$y_i \in \mathbb{R}^p$ – вектор выходных переменных i-й системы,

$\delta \in \mathbb{R}^l$ – вектор неопределенных пераметров,

A_i, B_i, A_{ij}, B_{ij} – действительные постоянные матрицы параметров системы,

i - номер системы, N - число систем.

Модель неопределенностей

- **Аффинная модель неопределенностей**

$$A_i(\delta(t)) = A_i + \sum_{j=1}^{l} \delta_j(t) A_{ij}, \; B_i(\delta(t)) = B_i + \sum_{j=1}^{l} \delta_j(t) B_{ij}, \tag{47}$$

где
$\delta(t) \in \Delta = \{\delta(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_l(t)) : \delta_j(t) \in [\underline{\delta}_j(t), \overline{\delta}_j(t)]\}$,
$\underline{\delta}_j(t), \overline{\delta}_j(t)$ **– нижняя и верхняя граница элемента** $\delta_j(t)$,
A_{ij}, B_{ij} **– известные матрицы,** $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, l$;

- **Конечное множество вершин области неопределенностей**

$$\bar{\Delta} = \{\delta(t) = [\delta_1(t), ..., \delta_l(t)]^T : \delta_j(t) \in \{\underline{\delta}_j(t), \overline{\delta}_j(t)\}\} \tag{48}$$

Модель нарушений

Нарушения $\rho(t)$ описываются однородной марковской цепью с заданным конечным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \nu\}$ и заданными вероятностями перехода

$$\mathbf{P}[\rho(t+1) = q | \rho(t) = r] = \pi_{rq}. \tag{49}$$

Постановка задачи

Задача состоит в нахождении такого закона управления, при котором выходной сигнал ведущей системы воспроизводил бы заданный сигнал

$$y_{ref}(t), \quad t \in [0, T]$$

с требуемой точностью $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{E}[|y_{ref}(t) - y_1(t)|^2] < \varepsilon, \quad t \in [0, T],$$

а ведомая система воспроизводила бы этот сигнал, обучаясь от ведущей либо, в случае информационных нарушений, от какой-либо другой системы:

$$\mathbf{E}[|y_{I_i[\rho(t)]]}(t) - y_i(t)|^2] < \varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad i = 2, 3, \ldots, N$$

2D модель

- **Алгоритм управления с итеративным обучением**

$$u_i(t, k+1) = u_i(t, k) + \Delta u_i(t, k+1), \tag{50}$$

где $\Delta u_i(t, k+1)$ – корректирующая добавка к управлению i-го входного управляющего вектора.

2D модель

- **Алгоритм управления с итеративным обучением**

$$u_i(t,k+1) = u_i(t,k) + \Delta u_i(t,k+1), \qquad (50)$$

где $\Delta u_i(t,k+1)$ – корректирующая добавка к управлению i-го входного управляющего вектора.

- **Система (46) с законом управления (50) может быть представлена как $2D$ система**

$$\begin{aligned} x_i(t+1,k) &= A_i(\delta)x_i(t,k) + B_i(\delta)u_i(t,k), \\ y_i(t,k) &= C_i x_i(t,k), \end{aligned} \qquad (51)$$

с граничными условиями

$$x_i(0,k) = x_{i0}, \;\; u_i(t,0) = 0, \;\; t \in [0,T], \;\; k = 0,1,\ldots \qquad (52)$$

Сходимость

Определение 6 *Алгоритм управления с итеративным обучением* (50) *называется сходящимся в среднем квадратическом, если для любых начальных условий* $\mathbf{x_{i0}}$ *и для любой начальной управляющей последовательности* $\{\mathbf{ui}(\mathbf{t}, \mathbf{0})\}$ *он задает такую последовательность* $\mathbf{u_i}(\mathbf{t}, \mathbf{k})$ *для системы* (46), *что*

$$\lim_{\mathbf{k}\to\infty} \mathbf{E}[|\mathbf{e_i}(\mathbf{t}, \mathbf{k})|] = \mathbf{0}, \quad \lim_{\mathbf{k}\to\infty} \mathbf{E}[|\mathbf{u_i}(\mathbf{t}, \mathbf{k}) - \mathbf{u_i}(\mathbf{t}, \infty)|] = \mathbf{0},$$

при $\mathbf{k} \to \infty$, $\mathbf{t} = [\mathbf{0}, \mathbf{T}]$, $\mathbf{i} = \mathbf{1}, ..., \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{E}$ — *оператор математического ожидания.*

2D модель

- Введем переменные

$$\begin{aligned} e_1(t,k) &= y_{ref}(t,k) - y_1(t,k), \\ e_i(t,k) &= y_{I_i[\rho(t)]}(k) - y_i(t,k), \\ \eta_i(t+1,k+1) &= x_i(t,k+1) - x_i(t,k), \quad i = 1,2,\dots,N. \end{aligned} \tag{53}$$

- Тогда система (51) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \eta(t+1,k+1) = \bar{A}_{11}(\delta)\eta(t,k+1) + \bar{A}_{12}(\delta)e(t,k) + \\ +\bar{B}_1(\delta)\Delta u(t-1,k+1), \\ e(t,k+1) = \bar{A}_{21}(\delta,\rho(t))\eta(t,k+1) + \bar{A}_{22}e(t,k) + \\ +\bar{B}_2(\delta,\rho(t))\Delta u(t-1,k+1), \end{aligned} \tag{54}$$

где $A_{11} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_N \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},$

$A_{22} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}, B_1 = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_N \end{bmatrix},$

Матрицы со случайной структурой

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -C_1A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1A_1 & -C_2A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_2A_2 & -C_3A_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{N-1}A_{N-1} & -C_NA_N \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -C_1B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1B_1 & -C_2B_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C_2B_2 & -C_3B_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{N-1}B_{N-1} & -C_NB_N \end{bmatrix}.$$

Алгоритм с обратной связью по состоянию

- Сформируем $\Delta u_i(t-1,k+1)$ в виде

$$\Delta u_i(t,k+1) = F_1(r)\eta(t+1,k+1) + F_2(r)e_i(t+1,k),\ \text{если } \rho(t) = r \quad (55)$$

где

$$F_1(r) = \begin{bmatrix} F_{11}(r) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{12}(r) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & F_{1N}(r) \end{bmatrix},$$

$$F_2(r) = \begin{bmatrix} F_{21}(r) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{22}(r) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & F_{2N}(r) \end{bmatrix}$$

- Тогда система (54) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \eta(t+1,k+1) &= (\bar{A}_{11}(\delta) + B_1(\delta)F_1(\rho(t-1)))\eta(t,k+1) + \\ &+ (\bar{A}_{12} + \bar{B}_1(\delta)F_2\rho(t-1)))e(t,k) \\ e(t,k+1) &= (\bar{A}_{21}(\delta,\rho(t)) + B_2(\delta,\rho(t))F_1(\rho(t-1)))\eta(t,k+1) + \\ &+ (\bar{A}_{22} + \bar{B}_2(\delta,\rho(t))F_2\rho(t-1)))e(t,k) \end{aligned} \quad (56)$$

Квадратичная функция Ляпунова

Выберем функцию Ляпунова вида

$$\begin{aligned} V_1 &= \eta^T(t, k+1) P_1 \eta(t, k+1), \\ V_2 &= e^T(t, k) P_2 e(t, k), \end{aligned} \tag{57}$$

где $P_1 = \mathrm{diag}[P_{11} \ \ \dots \ \ P_{1N}]$, $P_2 = \mathrm{diag}[P_{21} \ \ \dots \ \ P_{2N}]$

Условия устойчивости. ЛМН

$$\begin{bmatrix} X & (\bar{A}(\delta, r)X + \bar{B}(\delta, r)Y)^T & X \\ \bar{A}(\delta, r)X + \bar{B}(\delta, r)Y & X & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \qquad (58)$$

$$X > 0, \;\; \delta \in \bar{\Delta}, \;\; r \in \mathbb{N} \qquad (59)$$

где $\bar{A}(\delta, r) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}(\delta) \\ \bar{A}_{21}(\delta, r) & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{B}(\delta, r) = \begin{bmatrix} \bar{B}_1(\delta) \\ \bar{B}_2(\delta, r) \end{bmatrix}$,
$X = \mathrm{diag}[P_1^{-1} \;\; P_2^{-1}]$, $Y = FX$, $F = [F_1 \;\; F_2]$.

Если система (58) разрешима, матрицы F_1 и F_2 вычисляются по формулам

$$F_1 = Y_1 X_1^{-1}, \quad F_2 = Y_2 X_2^{-1} \qquad (60)$$

Численный пример

Рис. 4: Портальный робот

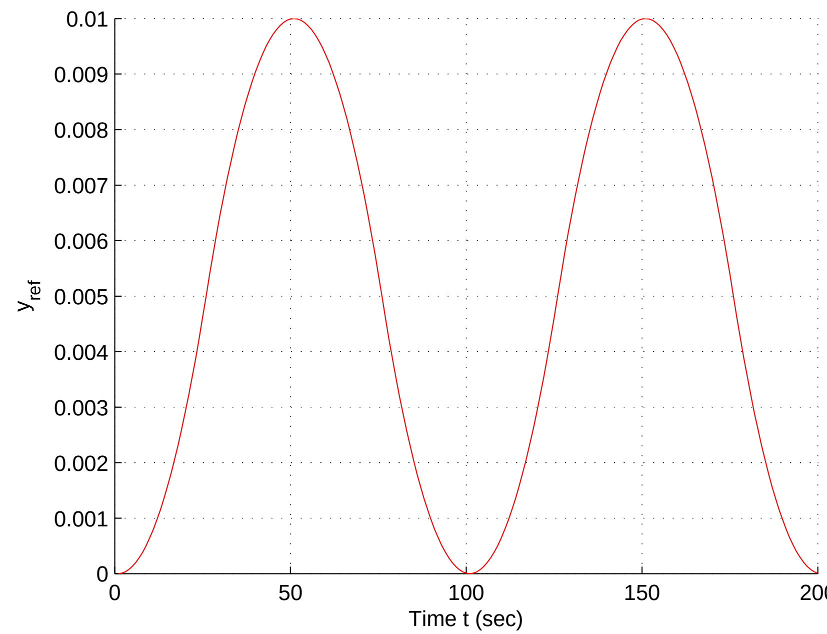


Рис. 5: Желаемая траектория

video

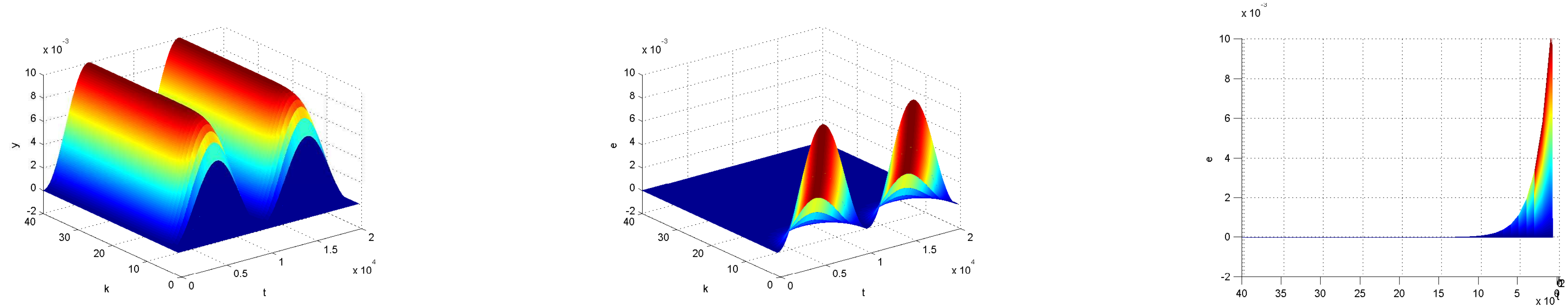
Численный пример

Матрицы параметров ведущей системы

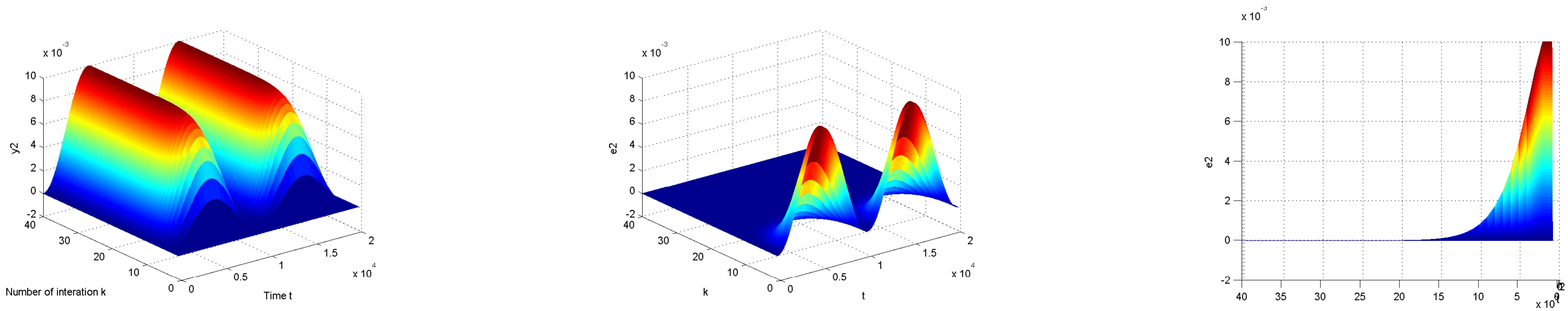
$$A = \begin{bmatrix} -0.002961 & 1 & 0 \\ -0.0008363 & -0.002961 & 0.03035 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01563 \end{bmatrix},$$

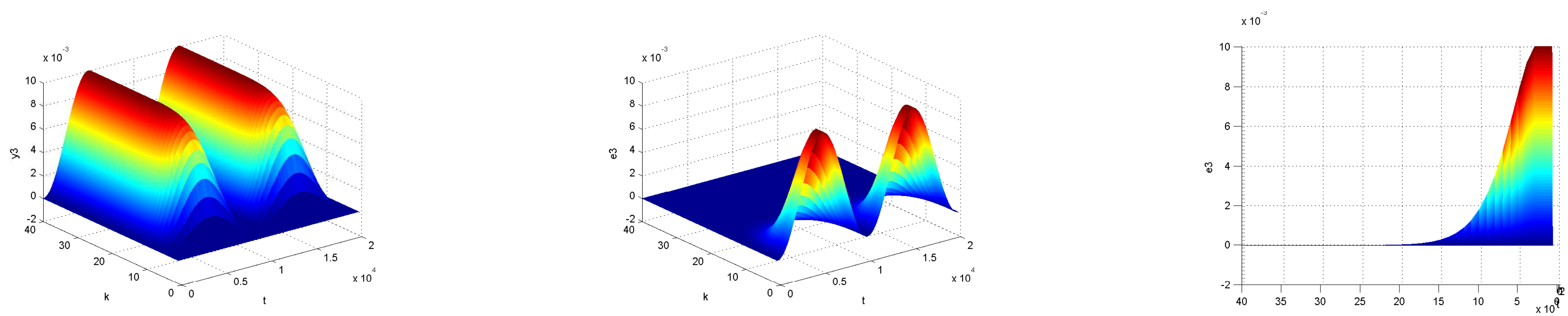
$$C = [0.0003718 \;\; 0.0070077 \;\; 0.02335]$$



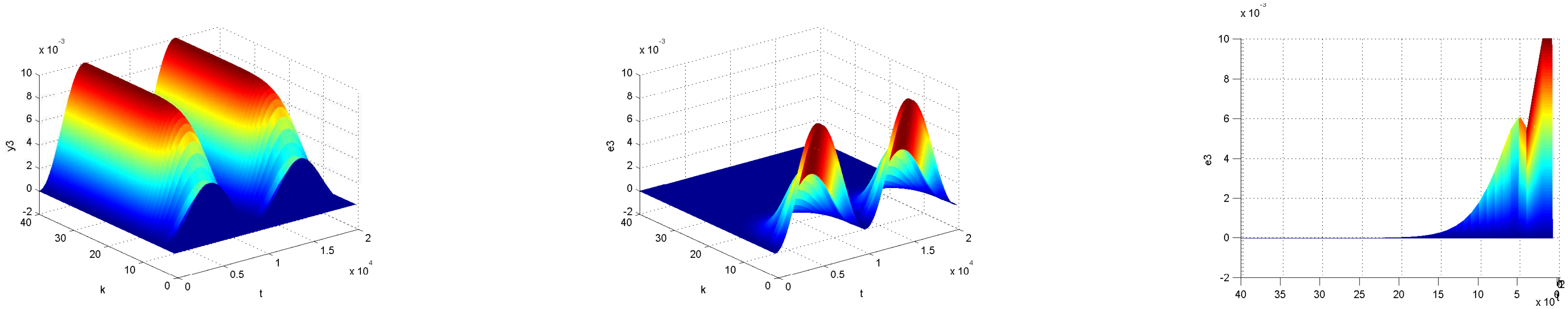
1) Выходной сигнал и ошибка обучения ведущей системы



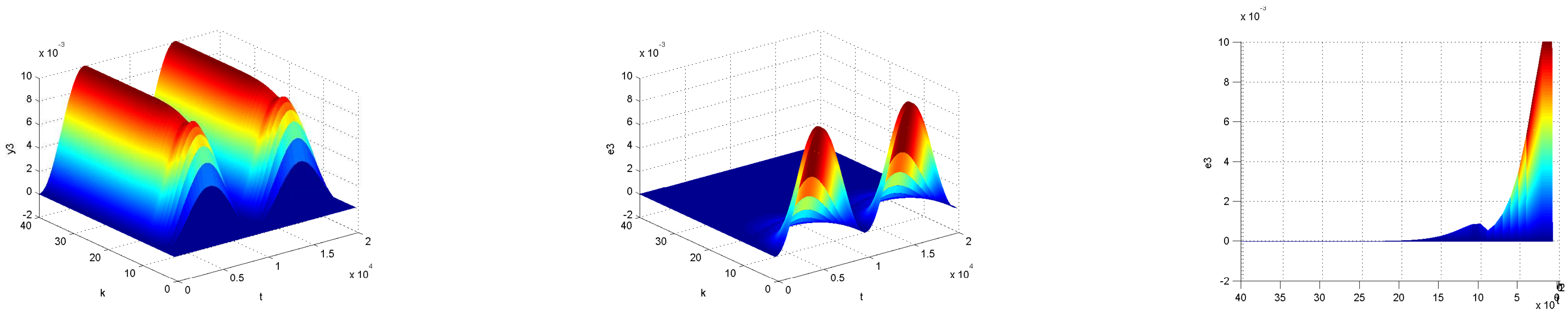
2) Выходной сигнал и ошибка обучения 1-й ведомой системы



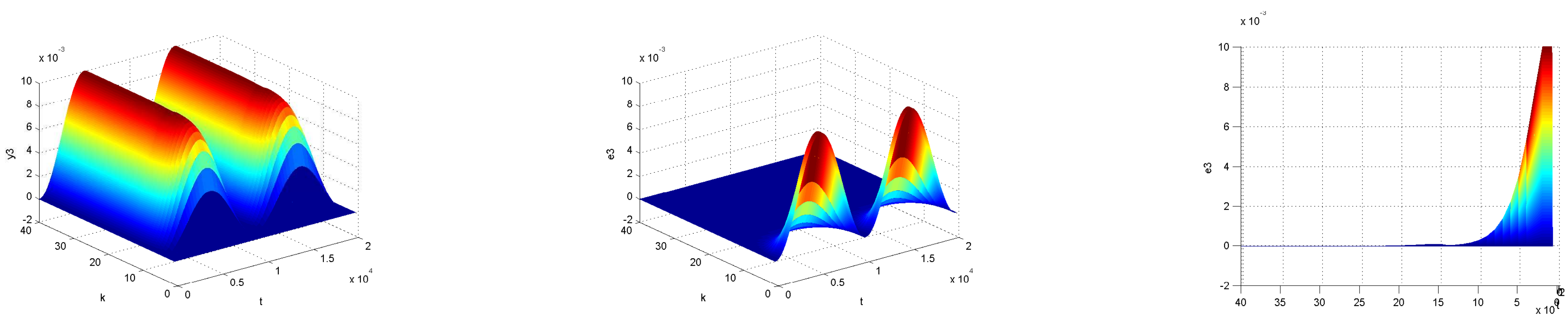
3) Выходной сигнал и ошибка обучения 2-й ведомой системы



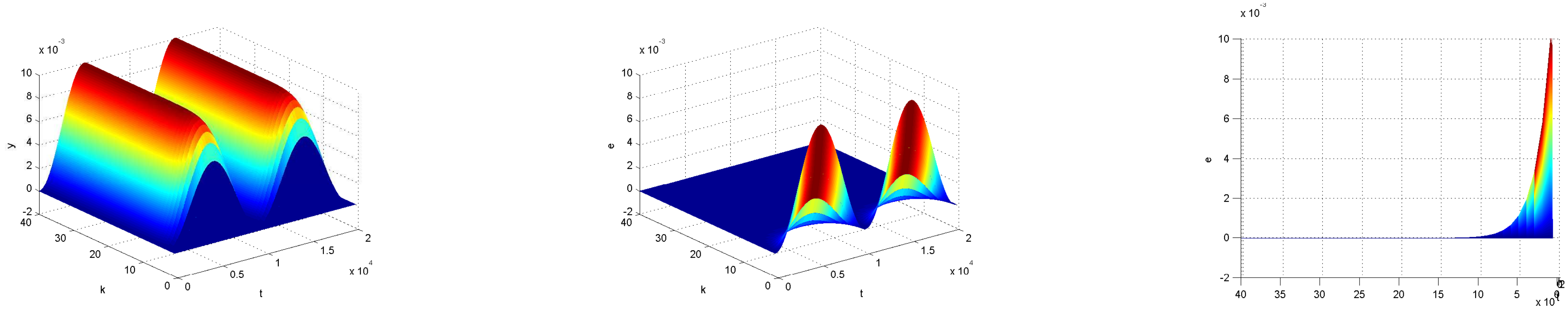
1) Выходной сигнал и ошибка обучения 2-й ведомой системы (потеря связи с лидером на 5-м шаге)



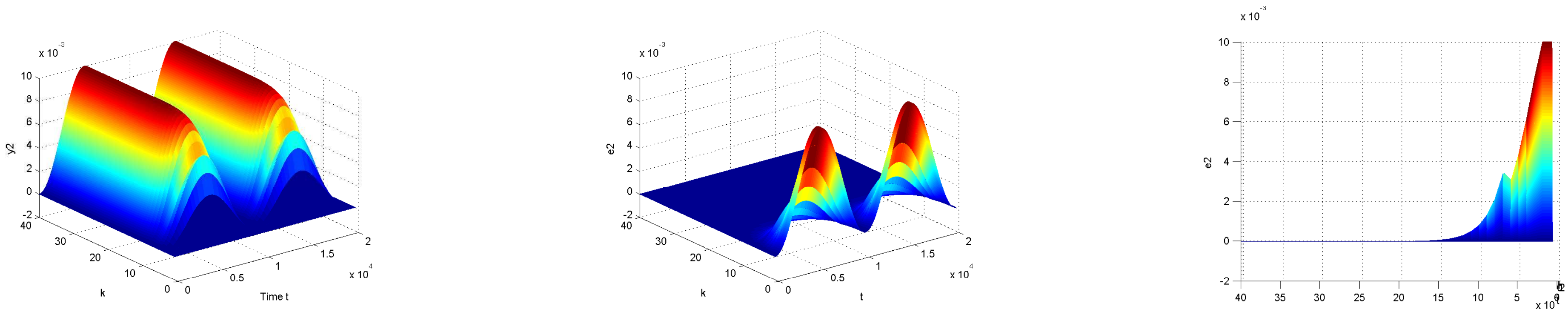
2) Выходной сигнал и ошибка обучения 2-й ведомой системы (потеря связи с лидером на 10-м шаге)



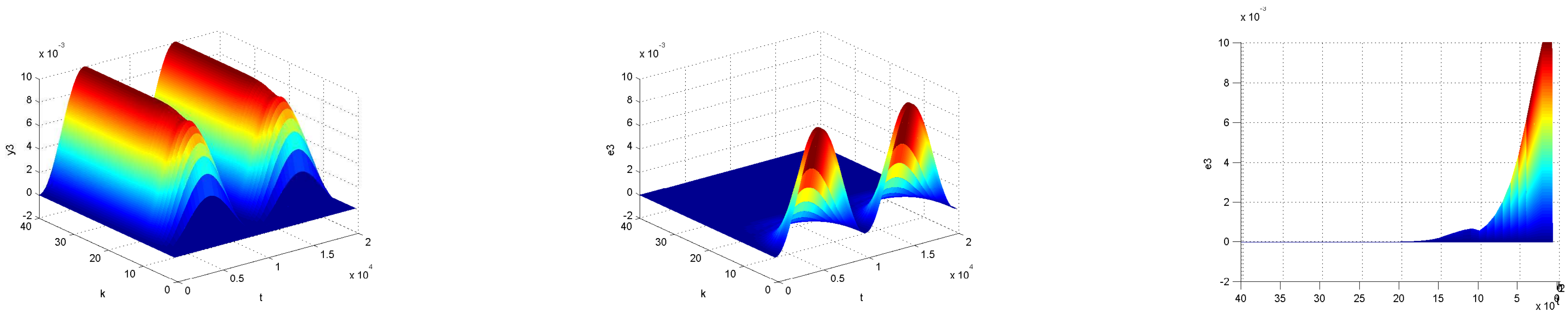
3) Выходной сигнал и ошибка обучения 2-й ведомой системы (потеря связи с лидером на 15-м шаге)



1) Выходной сигнал и ошибка обучения ведущей системы



2) Выходной сигнал и ошибка обучения 1-й ведомой системы (потеря связи с лидером с 5-го по 7-й шаг)



3) Выходной сигнал и ошибка обучения 2-й ведомой системы (потеря связи с лидером с 10-го по 15-й шаг)

Заключение

1. Получены условия экспоненциальной устойчивости в терминах свойств оператора дивергенции векторных функций Ляпунова или его дискретного аналога для различных классов нелинейных и нестационарных 2D систем.

2. Получены условия пассивности нелинейных дискретных повторяющихся процессов в терминах свойств оператора дивергенции векторных функций накопления и решение на основе этих условий задачи стабилизации указанных систем управлением с обратной связью.

3. Получены методы синтеза алгоритмов управления с итеративным обучением в условиях неопределенности и информационных нарушений на основе предложенных условий устойчивости и стабилизации.

Апробация

Международные конференции за рубежом:

1. 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control, Nice/Antibes, France, October 8–10, 2014;
2. The 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, 24–29 August, 2014;
3. XX международная конференция по автоматическому управлению, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.Г. Ивахненко, Николаев, Украина, 25–27 сентября, 2013;
4. The Eighth International Workshop on Multidimensional (nD) Systems nDS 2013, Erlangen, Germany, September 9-11, 2013;
5. The 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP'2013), Caen, France, 03-05 July, 2013;
6. 2012 IEEE Multi-conference on Systems and Control, Croatia, October 3–5, 2012;
7. The 20th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Melbourne, Australia, July 9–13, 2012;
8. 17 Международная научная конференция «Системный анализ управление и навигация», Евпатория, Украина, 1–8 июля, 2012;
9. International Conference «Cybernetic and Informatics», Slovac Society for Cybernetics and Informatics at the SAS, Slovak Republic, January 31–February 4, 2012;
10. 16 международная конференция «Системный анализ, управление и навигаци», Евпатория, Украина, 3–10 июля, 2011.

Апробация

Международные конференции в России:

1. The 9th IFAC Symposium Advances in Control Education The International Federation of Automatic Control, Nizhny Novgorod, Russia, June 19–21, 2012;
2. X Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление», Казань, Россия, 12–16 июня, 2012;
3. XII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, Россия, ИПУ РАН, 5–8 июня, 2012;
4. XII Международная молодежная научно-техническая конференция, Нижний Новгород, Россия, НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 18 мая, 2012;
5. The 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Saint Petersburg, Russia, 21–23 September, 2011.

Апробация

Всероссийские конференции:

1. XII Всероссийское совещание по проблемам управления, Москва, Россия, ИПУ РАН, 16–19 июня 2014;
2. XV конференция молодых ученых «Навигация и управление движение», Санкт-Петербург, Россия, ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 11–14 марта, 2014;
3. X Всероссийская школа-конференция молодых ученых, Уфа, Россия, УГАТУ, 5–7 июня, 2013;
4. XIV конференция молодых ученых «Навигация и управление движениемњ, Санкт-Петербург, Россия, ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 13–16 марта, 2012;
5. XV конференция молодых ученых «Навигация и управление движением», Санкт-Петербург, Россия, ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 12–15 марта, 2013;
6. Конференции «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012), Санкт-Петербург, Россия, ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 9–11 октября, 2012;
7. XIII конференция молодых ученых «Навигация и управление движениемњ, Санкт-Петербург, Россия, ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 15–18 марта, 2011.

Апробация

Региональные конференции:

1. XVIII Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки. Нижний Новгород, Россия, НИУ РАНХиГС, 28–31 марта, 2013.
2. XVII Нижегородская сессия молодых ученых. Технические науки. Нижний Новгород, Россия, НИУ РАНХиГС, 19–22 марта, 2012.

Список публикаций

1. Емельянова Ю. П. *Экспоненциальная устойчивость нелинейных дискретных 2D-систем* // Управление большими системами. Выпуск 47. М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 18–44. (ВАК, РИНЦ ИФ=0,290).
2. Емельянова Ю. П. *Устойчивость нелинейных повторяющихся процессов с возможными нарушениями* // Электронное научно-техническое издание «Наука и образование». МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2014. –є04. – DOI: 10.7463/0414.0704664 (ВАК, РИНЦ ИФ=0,164).
3. Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. *Passivity Based Stabilization of Nonlinear 2D Systems with Application to Iterative Learning Control* // 2014 IEEE Multi-conference on Systems and Control, Nice/Antibes, France, October 8–10. – 2014. (IEEExplore, Scopus, Web of Science).
4. Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. *Vector Lyapunov Function Based Stability of a Class of Applications Relevant 2D Nonlinear Systems* // Proceedings of the The 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, 24-29 August 2014 (IFAC-PapersOnLine, Scopus).

Список публикаций

5. Emelianova J., Pakshin P., Galkowski K., Rogers E. *Stability and Stabilization of Nonlinear 2D Markovian Jump Systems with Applications* // Proceedings of the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing (ALCOSP'2013), Caen - France, 03-05 July. – 2013. – P. 695–700, DOI 10.3182/20130703-3-FR-4038.00124, ISSN 1474-6670 (IFAC-PapersOnLine, Scopus).

6. Пакшин П. В., Емельнова Ю. П., Галковский К., Роджерс Э. Устойчивость двумерных нелинейных систем, описываемых непрерывной моделью Роессера // Автоматика и телемеханика. – 2014. – є05. – С. 157–173. (Web of Science, ВАК, РИНЦ ИФ=0,549).

7. Pakshin P., Emelianova J., Galkowski K., Rogers E. *Iterative Learning Control under Parameter Uncertainty and Failures* // 2012 IEEE Multi-conference on Systems and Control, Croatia, October 3-5. – 2012. – P. 1249–1254 ISBN: 978-1-4673-4504-0 (IEEExplore, Scopus, Web of Science).

8. Pakshin P., Emelianova J., Mazurov A. Yu. *An Experience of Using LMI Technique in Student Projects* // Proceedings of the 9th IFAC Symposium Advances in Control Education The International Federation of Automatic Control Nizhny Novgorod, Russia, June 19-21. – 2011. – P. 472–477 ISSN 1474-6670 DOI 10.3182/20120619-3-RU-2024.00071 (IFAC-PapersOnLine, Scopus).

Благодарю за внимание!