ВОЛЬФГАНГ ДЁБЛИН (ВЕНСАН ДОБЛИН): ЖИЗНЬ И НАУЧНОЕ НАСЛЕДИЕ

ГАЛИНА АЛЕКСАНДРОВНА ЗВЕРКИНА *

В статье изложена биография и проведена оценка научных достижений Вольфганга Дёблина (Венсана Доблина), математика, внесшего за свою короткую жизнь значительный вклад в теорию вероятностей и случайных процессов. Уроженец Германии, сын известного немецкого писателя А. Дёблина, В. Дёблин после прихода нацистов к власти вместе с семьей бежал во Францию, где получил высшее образование на Парижском факультете наук и позднее принял французское гражданство, став Венсаном Доблином.

Круг интересов молодого ученого был весьма широк: от классических задач, связанных с центральной предельной теоремой, до вопросов распределения «хвостов» цепных дробей. Высказанные им идеи получили дальнейшее развитие в исследованиях его современников и последователей, и его работы стали основой современной теории вероятностей наряду с работами А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина и П. Леви.

Кроме того, как оказалось, обнаруженные в 1999 г. в архиве Парижского университета неопубликованные рукописи Дёблина содержат в себе основы нового для его времени направления в развитии теории случайных процессов – теории стохастических дифференциальных уравнений; в этих рукописях Дёблин определил стохастический интеграл и доказал формулу, впервые опубликованную Киёси Ито на японском языке в 1942 г.

Ключевые слова: Вольфганг Дёблин (Венсан Доблин), биография, теория вероятностей, теория случайных процессов, марковские процессы.

THE LIFE AND SCIENTIFIC HERITAGE OF WOLFGANG DOEBLIN (VINCENT DOBLIN)

GALINA ALEKSANDROVNA ZVERKINA ¤

Mathematician Wolfgang Doeblin (1915–1940) was the son of the German writer Alfred Döblin. In 1933 the family fled from Nazi Germany to France. Wolfgang completed his mathematical education in Paris, took French citizenship, and changed

* Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ). Россия, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9. E-mail: zverkina@gmail.com.

¤ Moscow State University of Railway Engineering (MIIT). Ul. Obraztsova, 9, str. 9, Moscow, 127994, Russia. E-mail: zverkina@gmail.com.

Вопросы истории естествознания и техники. 2016. Т. 37. № 2. С. 325–349.
Voprosy istorii estestvoznaniia i tekhniki, 2016, vol. 37, no. 2, pp. 325–349.

his name to Vincent Doblin. In the short period before his untimely death during the war, he made important contributions to the theory of probability and stochastic processes. His unpublished manuscripts discovered in 1999 in the archive of the University of Paris contain the foundations for a new field – the theory of stochastic differential equations. Doeblin defined the stochastic integral and proved the formula now known as the Itô lemma (it was first published by Kiyoshi Itô in 1942). Doeblin's results helped establish the modern theory of probability, together with the works by A. N. Kolmogorov, A. Ya. Khinchin, and Paul Pierre Lévy.

Keywords: Wolfgang Doeblin (Vincent Doblin), biography, probability theory, the theory of stochastic processes, Markov processes.

На востоке Франции в деревне Усра (*Housseras*, Лотарингия, департамент Вогезы) имеется три достопримечательности. Это частный ботанический сад Гондремер (*Gondremer*), расположенный в трех километрах от деревни; необычной формы колокольня, имеющая нестандартное для этих мест навершие – маковку (*la rose grecque*), и главная достопримечательность этой небольшой деревни, в которой проживает менее пяти сотен человек, – могила солдата Второй мировой войны, рядового 291-го пехотного полка французской армии Венсана Добли́на (*Vincent Doblin*) [1], оказавшегося здесь 21 июня 1940 г. в окружении и покончившего с собой; в кладбищенском списке он записан двойным именем: Венсан-Вольфганг Доблин (*Vincent-Wolfgang Doblin*).

В деревне на стене старого амбара висит табличка: «*Ici est mort à 25 ans le 21 juin 1940 Vincent Döblin mathématicien de génie*» [2], рядом с могилой солдата похоронены его родители. В деревне работает общество «Ассоциация Усра – Доблин» (*Association Housseras – Doblin*), которое поддерживает память о молодом математике и его отце, проводит памятные церемонии. 21 июня 2015 г. здесь состоялась траурная церемония, посвященная 75-летию со дня смерти В. Доблина.

Биография

Венсан Доблин при рождении получил имя Вольфганг Дёблин (*Wolfgang Döblin*). Его родители – Альфред Дёблин (*Bruno Alfred Döblin*, 1878–1957) и Эрна Райсс (*Erna Reiss*) имели четырех сыновей: Петера (1913), Вольфганга (1915), Клауса (1917) и Стефана (1928). Несмотря на еврейское происхождение родителей, все дети были зарегистрированы как протестанты.

Альфред Дёблин был доктором медицины (неврологом) и известным немецким писателем, придерживавшимся левых взглядов. Наиболее известен его роман «Берлин, Александерплац» (1929).

---

[1] В соответствии с правилами французского языка фамилия *Doblin* должна читаться как «Доблен», однако во Франции установилась традиция чтения этой фамилии как «Добли́н», в чем можно убедиться, прослушав доступные в Интернете радиопередачи, посвященные герою этой статьи. Поскольку основная часть публикаций В. Доблина была подготовлена им до принятия французского гражданства, в математической литературе его обычно называют *W. Doeblin*; однако в ряде научных публикаций на французском языке его имя указано как *V. Doblin*.

[2] «Здесь 21 июня 1940 г. погиб гениальный математик Венсан Дёблин».

Вольфганг обладал большими способностями к математике и планировал после получения среднего образования изучать статистику с целью получения степени доктора политэкономии. Поэтому параллельно с обучением в гимназии он посещал занятия в Берлинской школе политологии (*Schülerkurse der Deutschen Hochschule für Politik*), но был отчислен в 1932 г. за «социалистическую пропаганду и радикальный антинацизм» [3].

В 1933 г. после поджога Рейхстага семья бежала в Цюрих; в Берлине остался лишь Вольфганг для окончания обучения в гимназии. В апреле 1933 г., получив диплом бакалавра в протестантской гимназии Кёнигштадт (*Königstadt*) [4], он воссоединился с семьей в Цюрихе и в мае того же года начал заниматься математикой сначала в Цюрихе, а затем в Париже, куда семья перебралась в сентябре 1933 г.; здесь юноша стал студентом Парижского факультета наук (*Faculté des sciences de Paris*), входившего в состав Сорбонны.

Обучение в университете было разбито на два этапа. Первый, подготовительный, предполагал изучение основ высшей математики и сдачу трех экзаменов: «общая математика» (дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения – обыкновенные и в частных производных, анализ Фурье и дифференциальная геометрия), «рациональная механика» и «общая физика». Эти экзамены полагалось сдать в течение двух лет, и по их результатам происходил отбор студентов для дальнейшего обучения, которое предполагало привлечение их к научной работе с последующей защитой диссертации.

В июне 1934 г. Дёблин сдал экзамены по «общей математике» и «рациональной механике» с оценками *assez bien* (весьма хорошо) [5].

Третий экзамен («общая физика») в то время, когда Вольфганг приступил к занятиям, мог был быть заменен на экзамен по статистике и теории вероятностей. Курс по этой дисциплине был незадолго до того разработан Жоржем Дармуа (*George Darmois*, 1888–1960) и включал в себя общий курс теории вероятностей, созданный Эмилем Борелем (*Félix Edouard Justin Émile Borel*, 1871–1956), и курс статистики авторства Дармуа. Также в 1933 г. Дармуа читал курс о верятностных (марковских) цепях вместо Мориса Фреше (*Maurice René Fréchet*, 1878–1973).

С самого начала обучения в Сорбонне Вольфганг увлекся теорией вероятностей и статистикой, с которыми был уже несколько знаком. Естественно, он решил заменить экзамен по физике на экзамен по теории вероятностей и статистике. Его выбор был связан не только с тем, что экзамен по физике был очень сложен (а экзамен по статистике считался более легким), но и с тем, что дипломированный статистик в то время мог гарантированно найти хорошо

---

[3] *Bru, B*. Reiew: L'Équation de Kolmogoroff. Vie et mort de Wolfgang Doeblin, un génie dans la tourmente, by Marc Petit (translated by Chandler Davis) // The Mathematical Intelligencer. 2009. Vol. 31. No. 2. P. 63.

[4] *Bru, B., Yor, M.* La vie de W. Doeblin et le pli cacheté 11668 // La lettre de l'Académie des sciences. 2001. No. 2. P. 16; *Bru, B., Yor, M.* Wolfang Doeblin et le pli cacheté 11668 // MATAPLI. 2002. No. 68. P. 76.

[5] Это не высшая оценка: в 1929 г. Мишель Лоэв (*Michel Loève*, 1907–1979) сдал экзамен по общей математике с оценкой *très bien* (отлично).

оплачиваемую работу; многие студенты-иммигранты [6] выбирали для дальнейшего изучения именно это направление. В октябре 1934 г. Дёблин опять-таки с оценкой *assez bien* сдал экзамен по статистике и теории вероятностей и в соответствии с тогдашними правилами 17 октября 1934 г. в возрасте 19 лет фактически завершил полный цикл университетского обучения. Дальнейшее его пребывание в университете подразумевало научную работу с последующей подготовкой и защитой диссертации; осенью 1935 г. ему должны были назначить научного руководителя.

В течение 1934–1935 гг. Дёблин посещает лекции и семинары в Институте Пуанкаре (*Institut Henri Poincaré*), слушает курсы по функциональному анализу, теории меры и интегрирования, знакомится с топологией, теорией алгебраических функций и другими бурно развивавшимися направлениями математики. Он много работает в библиотеке института, изучая не только учебные материалы, но и все доступные научные публикации.

В 1935 г. в Институте Пуанкаре начинает работать под руководством Луи де Бройля (*Louis de Broglie*, 1892–1987) молодая исследовательница Мария-Антуанетта Бодо (*Marie-Antoinette Baudot-Tonnelat*, 1912–1980), в дальнейшем известный французский физик-теоретик, специалист по электромагнетизму и теории относительности, а также истории физики. Видимо, именно в это время началась дружба молодых исследователей – Дёблина и Бодо (которая вскоре вышла замуж за физика Жака Тоннела (*Jacques Tonnelat*).

13 ноября 1935 г. по рекомендации Дармуа Дёблин становится членом Французского математического общества (*Société mathématique de France*, *SMF*).

Однако утверждение Дёблина в статусе лица, готовящегося к защите диссертации, несколько затянулось. Возможно, это было связано с тем, что молодой ученый еще не определился, в какой области он собирается работать. Кроме того, Дармуа советовал ему стать учеником Фреше, который в октябре – ноябре 1935 г. был в научной поездке в Советском Союзе.

Тем не менее Дёблин начинает самостоятельные исследования в области теории марковских цепей – в это время в ней преобладали скорее гипотезы, чем доказанные факты. Он сотрудничает с П. Леви (*Paul Pierre Lévy*, 1886–1971), Р. Форте (*Robert Fortet*, 1912–1998), Ж. Вилем (*Jean-André Ville*, 1910–1989), М. Лоэвом; в ходе своих исследований переписывается с Ф. Поллачеком (*Felix Pollaczek*, 1892–1981), Б. Хостинским (*Bohuslav Hostinský*, 1884–1951), Дж. Дубом (*Joseph Leo Doob*, 1910–2004) и др.; часть этой переписки сохранилась и опубликована [7]. В частности, в архиве А. Н. Колмогорова (1903–1987) сохранилось адресованное ему письмо Дёблина.

---

[6] В то время в Париже было много студентов из других стран, в том числе упомянутый выше Лоэв, бежавший из Палестины, – он также предпочел экзамен по статистике.

[7] *Bru, B.* Doeblin's Life and Work from His Correspondence // Doeblin and Modern Probability / H. Cohn (ed.). Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1993. P. 13–39 (Contemporary Mathematics. Vol. 149); *Mazliak, L.* Ten Letters from Wolfgang Doeblin to Bohuslav Hostinský // Electronic Journal for History of Probability and Statistics. 2007. Vol. 3. No. 1. P. 1–15 (см.: *http://www.jehps.net/Juin2007/MazliakDoeblin.pdf*); *Mazliak, L.* On the Exchanges between Wolfgang Doeblin and Bohuslav Hostinský // Revue d'histoire des mathématiques. 2007. T. 13. Fasc. 1. P. 155–180.

В. Дёблин во время жизни в Париже

Уже в 1935 г. Дёблин получает свои первые самостоятельные научные результаты, о чем сообщает в письмах Фреше, – эта переписка была весьма интенсивной, практически каждую неделю Вольфганг направлял своему будущему научному руководителю новые результаты.

22 января 1936 г. Дёблин был официально утвержден кандидатом для защиты диссертации под руководством Фреше.

К июню 1936 г. он получил основные результаты для своей диссертации, которые были представлены в виде объемных статей для публикации в Бухаресте [8] и Афинах [9]; в это же время он занимается оформлением диссертации, параллельно с этим работая и над новыми задачами.

В это время происходило реформирование теории вероятностей, и в своих работах Дёблин опирался не на классические представления о ней как об исследовании результатов экспериментов со случайными исходами (такого рода подход часто иллюстрировался, например, результатами тасования колоды карт), а на новую аксиоматику теории вероятностей, предложенную в 1933 г. Колмогоровым в его знаменитой книге «Основные понятия теории вероятностей» [10].

Следует отметить, что Дёблин во время своей работы в Институте Пуанкаре знакомил французских ученых со многими новыми публикациями по теории вероятностей, выходившими на немецком языке, в том числе со статьями Колмогорова и А. Я. Хинчина; для своих коллег он делал рукописные переводы некоторых текстов на французский язык – некотрые из этих переводов сохранилась в архиве Фреше.

13 мая и 10 июня 1936 г. Дёблин сделал два больших доклада по теме своих исследований на заседаниях Французского математического общества [11]; в

---

[8] *Doeblin, W.* Sur les propriétés asymptotiques des mouvements régis par certains types de chaînes simples // Bulletin mathématique de la Société des sciences mathématiques de Roumanie. 1937. T. 39. No. 1. P. 57–115; No. 2. P. 3–61.

[9] *Doeblin, W.* Exposé de la Théorie des Chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'Etats // Revue mathématique de l'Union interbalkanique. 1938. T. 2. P. 77–105.

[10] *Kolmogoroff, A. N.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer, 1933 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. 2) (см. также: *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936).

[11] Сообщения об этих докладах были опубликованы в отчетах о заседаниях Французского математического общества: *Doeblin, W.* Sur certaines propriétés asymptotiques de l'équation de Smoluchowski // Société Mathématique de France. Comptes Rendus des Séances. 1936. P. 29; *Doeblin, W.* Sur les noyaux stochastiques // Ibid. P. 31.

В. Дёблин в армии

его бюллетене и в отчетах о заседаниях регулярно появляется информация и о других сообщениях молодого математика на заседаниях общества.

В это время произошло важное событие в жизни семьи Дёблинов: все они, за исключением старшего сына Петера, эмигрировавшего в США, стали гражданами Французской Республики; в соответствии с действовавшими тогда правилами их фамилия стала Доблин (*Doblin*).

16 октября 1936 г. Вольфганг получил французское имя Венсан (*Vincent*) [12]. Однако в переписке с учеными он, видимо, по привычке, подписывал свои письма *W. Doeblin* или *W. Doblin*. Все публикации Дёблина, кроме последней подготовленной им заметки, вышли с подписью *W. Doeblin* – возможно, это связано с тем, что после принятия статьи к печати изменение имени автора было невозможно. Последняя его публикация подписана *V. Doblin*; более того, в собственной ссылке на свою предыдущую работу автор также указывается как *V. Doblin*.

В январе 1937 г. Дёблин по рекомендации Фреше получил грант фонда Арконати-Висконти [13] (6750 франков) для продолжения научной работы.

Отметим, что сразу после получения французского гражданства перед Дёблином встал вопрос о службе в армии; он стремился выполнить свой долг перед приютившей его семью страной, но в связи со сложной политической обстановкой в Европе призыв в армию был существенно сокращен до 1938 г.

11–16 октября 1937 г. Дёблин участвовал в Женеве в работе научного собрания под названием «Семинар по теории вероятностей под руководством г-на Мориса Фреше» (*Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet*), где мог общаться с такими учеными, как Б. Хостинский, Г. Крамер (*Harald Cramér*, 1893–1985), В. Феллер (*William Feller*, 1906–1970), Б. де Финетти (*Bruno de Finetti*, 1906–1985), Г. Штенгауз (*Hugo Dyonizy Steinhaus*, 1887–1972), А. Вальд (*Abraham Wald*, 1902–1950) и др. На этой конференции, организованной Женевским университетом, важное место занимали вопросы обоснования теории вероятностей.

26 марта 1938 г. Дёблин защитил диссертацию в Сорбонне и в 23 года стал доктором математических наук.

3 ноября 1938 г. он был призван во французскую армию. Возможно, ввиду того, что в мирное время во время каникул молодой человек любил горные походы, его служба проходила в частях, дислоцировавшихся в горной мест-

---

[12] Его брат Клаус стал Клодом, а младший брат Стефан остался Стефаном.

[13] Фонд поддержки научных исследователей Арконати-Висконти был образован в соответствии с завещанием маркизы Марии-Луизы Арконати-Висконти (*Marie-Louise Arconati-Visconti, 1840–1923*), оставившей значительную часть своего состояния Парижскому университету.

ности. Он служил в нестроевой должности телефониста. Находясь на ночных дежурствах, Дёблин продолжал заниматься научными исследованиями, переписывался со своим научным руководителем Фреше, сообщая о своих новых идеях и результатах.

2 сентября 1939 г. началась Вторая мировая война, и Дёблин оказался мобилизованным в действующую армию. Несмотря на то что ему приходилось служить в частях, участвующих в боевых действиях, молодой ученый не прерывал научную работу. Во время ночных дежурств и в свободное от воинских обязанностей время он продолжал работать над темами, которые ранее обсуждал в Париже со своими коллегами и которые анонсировал в *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* (*CRAS*) до ухода в армию. Он продолжал научную переписку, в частности, обсуждал с Фреше возможность получения нового гранта для научной работы после окончания военной службы, надеясь на скорое окончание войны. 14 февраля 1940 г. отец Дёблина Альфред сообщал своему сыну Петеру, живущему в США, о том, что «Вольфганг находится в хорошем настроении, и при случае даже посылает математические исследования» [14].

В марте 1940 г. Дёблин сообщил Фреше, что месяц назад начисто переписал свою рукопись об уравнении Колмогорова и черновой ее вариант отправил домой, а окончательный текст – отдельным письмом в Академию наук. Вероятно, это почтовое послание с фронта достигло адресата 13 марта 1940 г. Также не исключено, что вариант этого текста был привезен Дёблином в Париж во время краткосрочного отпуска и позднее передан в Академию наук М.-А. Тоннела. В конечном счете эта последняя научная работа Дёблина оказалась в университетском архиве Фреше, но лишь в 2000 г. она попала в руки исследователей.

Дёблин участвовал в боевых действиях и 19 мая 1940 г. был награжден Военным крестом с пальмовой ветвью (*Croix de guerre avec palme*) – наградой за отвагу.

14 июня немецкие войска вступили в Париж. 17 июня правительство Франции обратилось к Германии с просьбой о перемирии. 20 июня Дёблин вместе с несколькими сослуживцами оказался в деревне Усра. Воинская часть, в которой он служил, получила приказ сдаться. Франция готовилась к капитуляции, которая произошла через два дня, 22 июня 1940 г. Утром в деревню вошли фашисты. Дёблин зашел в помещение одной из ферм, в очаге на кухне сжег имеющиеся у него бумаги и затем покончил с собой в хозяйственной постройке этой фермы. Он хорошо представлял себе незавидную участь бежавшего из Германии еврея, воевавшего на стороне Франции [15].

Как только появилась возможность, Тоннела стала разыскивать останки своего молодого коллеги в Вогезах; благодаря ее настойчивости

---

[14] *Lindvall, T.* W. Doeblin, 1915–1940 // The Annals of Probability. 1991. Vol. 19. No. 3. P. 933.

[15] У Дёблина сохранялся очень сильный (как говорили его современники, «тяжелый») немецкий акцент. Возможно, это было причиной некоторой его нелюдимости (за исключением научных контактов) в Париже. Армейские же сослуживцы Венсана запомнили его как дружелюбного и общительного человека – вполне вероятно, это было связано с тем, что в армии служили уроженцы разных провинций Франции, с разными акцентами, и акцент Дёблина не выделялся на фоне речи других солдат.

19 апреля 1944 г. тело Дёблина было идентифицировано по браслету и перезахоронено.

Дёблин был посмертно награжден Военной медалью (*Médaille militaire*).

В 1945 г. отец В. Дёблина Альфред, эмигрировавший вместе с супругой в США в 1940 г., вернулся в Германию, где в 1957 г. после продолжительной болезни скончался. Его супруга вскоре покончила с собой, и в соответствии с завещанием А. Дёблина они были похоронены рядом с сыном Венсаном.

Краткая характеристика состояния теории вероятностей в начале XX в.

В то время когда Дёблин начал заниматься научными исследованиями, в теории вероятностей происходили большие изменения. В связи с развитием теории меры и функционального анализа теория вероятностей начала рассматриваться как важный раздел теории меры; теоретико-множественный подход и использование аппарата теории меры привели к пересмотру методов доказательств основных и чрезвычайно важных в приложениях теорем, таких как, например, центральная предельная теорема (ЦПТ). Многие математики предлагали новые методы и варианты доказательства ЦПТ, варьируя условия, в которых сходимость соответственным способом нормированных сумм случайных величин сходилась к нормальному распределению. Такого рода исследования продолжаются и по сей день.

Другим важным вопросом в теории вероятностей было исследование поведения случайных процессов, в первую очередь марковских.

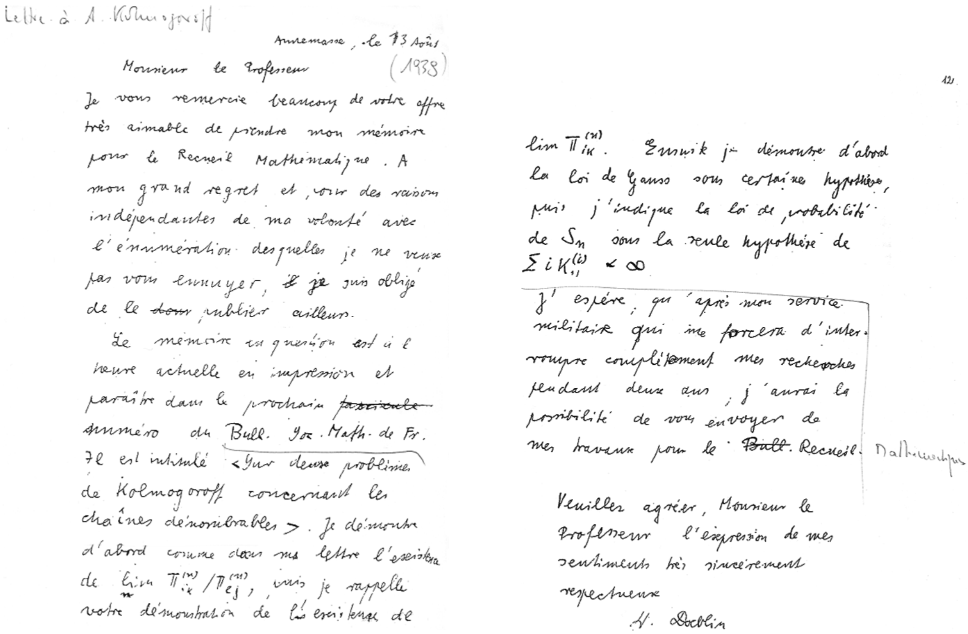
Рассматривая вероятностное событие как измеримое множество из соответствующей σ-алгебры измеримых множеств, Колмогоров предложил определение случайного процесса как параметризованного (обычно по времени) множества случайных величин ξ_t; фактически случайный процесс задавался параметризованным семейством вероятностных мер.

Исследования процессов самой разной природы приводили к представлению о марковских случайных процессах, т. е. о процессах, поведение которых (при известном состоянии в фиксированный момент времени) зависело только от того состояния, которое наблюдалось в этот момент времени и не зависело от предыстории этого случайного процесса; простейший вариант марковского процесса – это марковские цепи, исследование которых начал А. А. Марков (1856–1922). При исследовании марковских процессов большую роль играли прямые и обратные уравнения Колмогорова – Чэпмена, это – непрерывный аналог уравнений для переходных вероятностей цепей Маркова.

Важной задачей, которой занимались многие математики, являлось определение условий *эргодичности* случайного процесса, т. е. тех условий, при которых при $t \to \infty$ распределение случайного процесса ξ_t сходится к некоторому *стационарному* распределению [16].

---

[16] Поскольку сходимость распределений – это сходимость мер, то важно было также установить, какого сорта эта сходимость: слабая, сильная, в среднем квадратическом и т. п.


Lettre à A. Kolmogoroff

Annemasse, le 13 Août (1938)

121

Monsieur le Professeur

Je vous remercie beaucoup de votre offre très aimable de prendre mon mémoire pour le Recueil Mathématique. A mon grand regret et, pour des raisons indépendantes de ma volonté avec l'énumération desquelles je ne veux pas vous ennuyer, ~~il~~ ~~je~~ je suis obligé de le ~~donn~~ publier ailleurs.

Le mémoire en question est à l'heure actuelle en impression et paraîtra dans le prochain ~~fascicule~~ numéro du Bull. Soc. Math. de Fr. Il est intitulé <Sur deux problèmes de Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables>. Je démontre d'abord comme dans ma lettre l'existence de $\lim \Pi_{ik}^{(n)}/\Pi_{ej}^{(n)}$, puis je rappelle votre démonstration de l'existence de $\lim \Pi_{ik}^{(n)}$. Ensuite je démontre d'abord la loi de Gauss sous certaines hypothèses, puis j'indique la loi de probabilité de S_n sous la seule hypothèse de $\Sigma\, i K_{1}^{(i)} < \infty$

J'espère, qu'après mon service militaire qui me ~~forcera~~ d'interrompre complètement mes recherches pendant deux ans; j'aurai la possibilité de vous envoyer de mes travaux pour le ~~Bull.~~ Recueil. Mathématique

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur l'expression de mes sentiments très sincèrement respectueux

W. Doeblin

Письмо В. Дёблина А. Н. Колмогорову

Сейчас важную роль в теории случайных процессов играет *винеровский процесс* – математическая модель броуновского движения. Работа французского математика Л. Башелье [17] (*Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier*, 1870–1946), посвященная исследованию случайных процессов, связанных с финансовой деятельностью, *фактически* использовала математическую модель броуновского движения.

При исследовании случайных процессов, возникающих в финансовых моделях, Башелье рассматривал следующую модель: брокеры создают случайный поток заявок для биржи – заявки на покупку и на продажу акций – это многочисленные небольшие случайные воздействия. Если число заявок на покупку превышает число заявок на продажу, то цена акций растет, в противном случае она падает. Башелье (в некоторых естественных ограничениях) исследовал приращение цены за разные (непересекающиеся) промежутки времени как случайные величины и пришел к выводу, что они статистически независимы – это характерное свойство *винеровского* процесса, который является математической моделью броуновского движения.

Броуновское движение, открытое Р. Броуном (*Robert Brown*, 1773–1858) в 1827 г., активно исследовалось физиками конца XIX – начала XX в. В 1905 г. А. Эйнштейн (*Albert Einstein*, 1879–1955) впервые предложил описание физической модели этого явления; экспериментальным путем он вывел формулу

[17] *Bachelier, L.* Théorie de la spéculation // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1900. T. 3. No. 17. P. 21–86 (это диссертация, выполненная под руководством А. Пуанкаре (*Henri Poincaré*, 1854–1912) и защищенная 29 марта 1900 г.)

для коэффициента диффузии сферических броуновских частиц. Эта формула позднее была подтверждена опытами Ж. Перрена (*Jean Baptiste Perrin*, 1870–1942) и его учеников в 1908–1909 гг. В 1906 г. описание модели броуновского движения было предложено М. Смолуховским (*Marian Smoluchowski*, 1872–1917); оказалось, что броуновское движение удобно представлять как случайный марковский процесс, переходная функция которого удовлетворяет сформулированным Смолуховским условиям.

Первое строгое (но очень сложное) доказательство существования такого процесса как математического объекта в рамках существовавших в то время представлений о случайных процессах, несколько позднее строго сформулированных в знаменитой книге Колмогорова [18], было сделано Н. Винером (*Norbert Wiener*, 1894–1964) в 1922–1923 гг. Позднее появились другие, более естественные доказательства, основанные как на теоремах Колмогорова (о построении меры по конечномерным распределениям и о существовании непрерывной модификации случайного процесса), так и на сходимости случайных рядов.

Во второй половине XX в. случайный процесс, описывающий броуновское движение, уже повсеместно стал называться винеровским процессом; этому способствовала публикация Винера 1958 г. [19] – до этого времени такой случайный процесс называли случайным процессом, удовлетворяющем уравнениям Колмогорова – Чэпмена, или уравнениям Смолуховского, или броуновским процессом.

В середине XX в. была «переоткрыта» работа Башелье, в которой, как говорилось выше, винеровский процесс описывал финансовые явления с большим количеством активных участников. Сейчас использование винеровского процесса и построенных с его помощью *стохастических дифференциальных уравнений* является мощным аппаратом экономического прогнозирования.

Итак, что же такое винеровский процесс? Его можно представить себе, например, следующим способом. Рассмотрим одномерное дискретное случайное блуждание: в моменты времени $t = n\Delta$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) позиция передвигающейся вдоль координатной оси частицы x_t может с вероятностью 1/2 увеличиться: $x_{t+} = x_t + a\Delta$ или с вероятностью 1/2 уменьшиться: $x_{t+} = x_t - b\Delta$ ($a > 0$, $b > 0$); если $a = b$, то это – симметричное случайное блуждание. Если $\Delta \downarrow 0$, то моменты изменения положения частицы становятся все чаще, перемещения все короче, а график ее движения можно представить ломаной линией, у которой количество звеньев на каждом конечном отрезке стремится к бесконечности; в пределе этот график нигде не дифференцируем, но непрерывен.

Например, при игре в орлянку (каждую минуту при бросании правильной монеты в случае выпадения орла игрок получает 1 рубль, а в противном случае – проигрывает 1 рубль) капитал игрока – это случайный процесс, который является случайным блужданием с параметрами $\Delta = 1$(минута), $a = b = 1$. Если начальный капитал игрока нулевой (он может играть в долг) и если в этой ситуации устре-

---

[18] *Kolmogoroff.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung…

[19] *Wiener, N.* Nonlinear Problems in Random Theory. Cambridge, MA: MIT Press, John Wiley & Sons, 1958 (см. также: *Винер Н.* Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961).

мить Δ к 0, то «в пределе» (здесь мы не объясняем, что под этим подразумевается) случайное блуждание превращается в *стандартный винеровский процесс* – простейший случайный процесс, описывающий броуновское движение.

Если же случайное блуждание несимметрично ($a \neq b$) или если даже a и b зависят от времени или от положения частицы, то при $\Delta \downarrow 0$ предельный процесс является *диффузионным случайным процессом* со сносом (снос определяется разностью между a и b), он имеет огромное значение в физических исследованиях, а также и в исследовании сложных экономических моделей [20].

Научное наследие В. Дёблина

Всего за свою короткую научную жизнь Дёблин подготовил 13 заметок в *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* (*CRAS*) [21] – к публикации эти заметки были рекомендованы Ж. Адамаром (*Jacques Salomon Hadamard*, 1865–1963) и Э. Борелем – и 13 статей [22]. Кроме

[20] Отметим, что в своей дальнейшей деятельности Башелье занимался исследованием диффузионных случайных процессов.

[21] *Doeblin, W., Lévy, P.* Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement // CRAS. 1936. T. 202. P. 2027–2029; *Doeblin, W.* Sur les chaînes discrètes de Markoff // CRAS. 1936. T. 203. P. 24–26; *Doeblin, W.* Sur les chaînes de Markoff // CRAS. 1936. T. 203. P. 1210–1211; *Doeblin, W., Fortet, R.* Sur deux notes de MM. Kryloff et Bogoliouboff // CRAS. 1937. T. 204. P. 1699–1701; *Doeblin, W.* Eléments d'une théorie générale des chaînes constantes simples de Markoff // CRAS. 1937. T. 205. P. 7–9; *Doeblin, W.* Premiers éléments d'une étude systématique de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité // CRAS. 1938. T. 206. P. 306–308; *Doeblin, W.* Etude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité // CRAS. 1938. T. 206. P. 718–720; *Doeblin, W.* Sur les sommes d'un grand nombre de vecteurs aléatoires // CRAS. 1938. T. 207. P. 511–513; *Doeblin, W.* Sur l'équation de Kolmogoroff // CRAS. 1938. T. 207. P. 705–707; *Doeblin, W.* Sur certains mouvements aléatoires // CRAS. 1939. T. 208. P. 249–250; *Doeblin, W.* Sur un problème de calcul des probabilités // CRAS. 1939. T. 209. P. 742–743; *Doeblin, W.* Sur l'équation de Kolmogoroff // CRAS. 1940. T. 210. P. 365–367; *Doeblin, W.* Sur les mouvements mixtes // CRAS. 1940. T. 210. P. 690–692.

[22] *Doeblin, W.* Le cas discontinu des probabilités en chaîne // Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk. 1937. No. 236. P. 3–13, 592 (исправления); *Doeblin, W.* Sur le cas continu des probabilités en chaîne // Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei. 1937. T. 25. P. 170–176; *Doeblin, W., Fortet, R.,* Sur les chaînes à liaisons complètes // Bulletin de la Société mathématique de France. 1937. T. 65. 132–148; *Doeblin, W.* L'équation de Smoluchowski // Praktikà tês Akademías Athēnōn. 1937. Vol. 12. P. 116–119; *Doeblin,* Sur les propriétés asymptotiques... (1937); *Doeblin, W.* Sur l'équation matricielle $A^{(t+s)}=[A^{(t)}A^{(s)}]$ et ses applications aux probabilités en chaînes // Bulletin des sciences mathématiques. 1938. T. 62. P. 21–32; *Doeblin, W.* Sur l'équation matricielle $A^{(t+s)}=[A^{(t)}A^{(s)}]$ et ses applications au calcul des probabilités. Rectification // Bulletin des sciences mathématiques. 1940. T. 64. P. 35–37; *Doeblin, W.* Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables // Bulletin de la Société mathématique de France. 1938. T. 66. P. 210–220; *Doeblin.* Exposé de la Théorie des Chaînes...; *Doeblin, W.* Sur les sommes d'un grand nombre de variables indépendantes // Bulletin des sciences mathématiques. 1939. T. 63. P. 23–32, 35–64; *Doeblin, W.* Sur certains mouvements aléatoires discontinus // Skandinavisk aktuarietidskrift. 1939. Bd. 22. S. 211–222; *Doeblin, W.* Remarques sur la théorie métrique des fractions continues // Compositio mathematica. 1940. T. 7. P. 353–371; *Doblin, W.* Elément d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff // Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1940. T. 57. P. 61–111; *Doeblin, W.* Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité // Studia mathematica. 1940. T. 9. P. 71–96 (переиздание с комментариями: Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1947. T. 63. P. 317–350).

того, была издана его диссертация [23] и краткие сообщения о его выступлениях на заседаниях Французского математического общества [24].

В большинстве случаев заметки в *CRAS* и выступления на заседаниях *SMF* предваряли публикацию более обстоятельного изложения и доказательства анонсированных результатов.

Как и многие математики, занимающиеся теорией вероятностей, Дёблин доказывал центральную предельную теорему в различных видах.

Как известно, ЦПТ – это утверждение вида: для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, обладающей некоторыми свойствами, определены такие неслучайные последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, что распределение случайных величин

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - A_n}{B_n} \tag{1}$$

при $n \to \infty$ сходится к стандартному нормальному распределению. В «классическом» случае случайные величины $\{\xi_i\}$ независимы и одинаково распределены, а $A_n = n\,\mathrm{E}\,\xi_i$, $B_n = \sqrt{n\,\mathrm{D}\,\xi_i}$. Однако в практических приложениях теории вероятностей и основанных на ЦПТ статистических методах часто приходится отказываться от независимости и / или одинаковой распределенности случайных величин $\{\xi_i\}$ и заменять эти условия на другие; в этом случае доказательство асимптотической нормальности случайных величин вида (1) также называется ЦПТ.

Один из вопросов, возникающих при доказательстве ЦПТ, – это оценка величин A_n и B_n; Дёблин оценил дисперсию суммы независимых случайных величин, «с некоторой вероятностью достаточно малых».

Рассматривая эргодическую марковскую цепь (МЦ) X_n, Дёблин доказал ЦПТ для последовательностей $\{X_n\}$, $\{1(X_n = a)\}$, $\{f(X_n)\}$(здесь $1(A)$ – индикатор случайного события A, равный 1, если оно произошло, и 0, если события A не случилось). Кроме того, он доказал ЦПТ и для случая *слабозависимых* случайных величин.

Следует отметить, что выбирая последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ различными способами, можно, вообще говоря, в качестве предельного распределения полу-

---

[23] *Doeblin, W.* Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples // Théses françaises de l’entre-deux-guerres. 1938. T. 204. P. 1–123.

[24] *Doeblin, W.* Sur les probabilités en chaîne // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1936. P. 28–29; *Doeblin, W.* Sur certaines propriétés asymptotiques de l’équation de Smoluchowski // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1936. P. 29; *Doeblin, W.* Sur les noyaux stochastiques // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1936. P. 31; *Doeblin, W.* Sur certains résultats de MM. Fréchet et Hadamard // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1936. P. 31; *Doeblin, W.* Sur les chaînes de Markoff // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1936. P. 34; *Doeblin, W.* Sur l’extension de quelques théorèmes de Frobenius et Jentzsch // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1937. P. 31; *Doeblin, W.* Sur la loi de Gauss et les chaînes dénombrables // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1937. P. 31; *Doeblin, W.* Remarques sur la théorie métrique des fractions continues // Société mathématique de France. Comptes rendus des séances. 1938. P. 28–29.

чать не только нормальное распределение; распределения, которые могут быть получены в виде таких пределов, называются *устойчивыми*; Леви и Хинчиным были описаны характеристические функции всех возможных устойчивых распределений (так называемое представление Леви – Хинчина).

Множество распределений случайных величин, составленные из которых суммы вида (1) сходятся к данному устойчивому распределению, называется областью притяжения устойчивого распределения; Дёблин описал области притяжения устойчивого распределения с показателем меньше 2; подобный результат независимо был получен Б. В. Гнеденко (1912–1995) в 1939 г.

Кроме собственно доказательства сходимости распределения сумм вида (1) или МЦ к предельному распределению Дёблин в ряде случаев оценивал скорость этой сходимости – некоторые из этих результатов не были оформлены для публикации и стали известны только после обнародования сохранившихся писем Дёблина.

Важная область интересов Дёблина – марковские цепи. Он исследовал их поведение в зависимости от переходных вероятностей и дал *классификацию их состояний*. Сейчас такая классификация кажется вполне естественной и удобной, однако, как уже ранее говорилось, в первой трети XX в. исследования цепей Маркова находились на достаточно примитивном уровне. В теорию марковских цепей вошло понятие «разложение Дёблина» (*Doeblin decomposition*). Примерно в это же время классификация МЦ была сделана Колмогоровым.

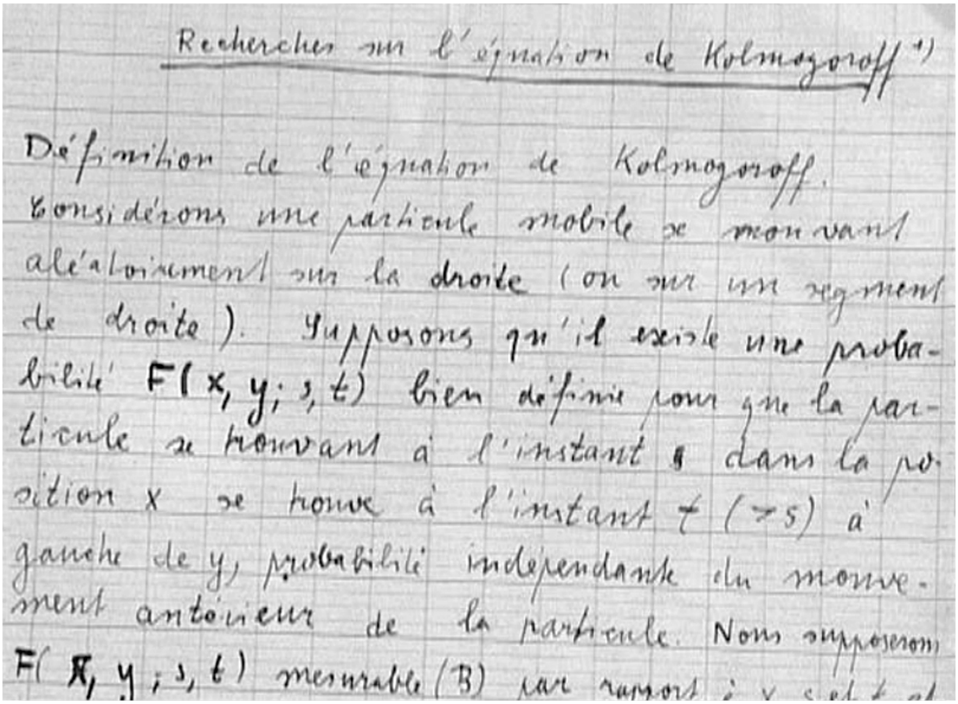
Исследуя поведение МЦ при $t \to \infty$ Дёблин сформулировал условие эргодичности марковской цепи, которое теперь носит название *условие Дёблина* или *условие Дёблина – Дуба* (Дж. Дуб несколько обобщил это условие в своем знаменитом сочинении [25], называя, впрочем, это условие «условием Дёблина»). Исследуя неоднородные марковские цепи (т. е. случай, когда переходные вероятности непостоянны), Дёблин сформулировал и доказал *эргодический принцип* для марковских цепей, т. е. необходимое и достаточное условие существования стационарного распределения, к которому сходится распределение МЦ. Кроме того, совместно с Р. Форте им была доказана теорема, которая сейчас известна как теорема Дёблина – Форте.

Ряд заметок в *CRAS.* [26] посвящен уравнению Колмогорова для марковских процессов в непрерывном времени. Дёблин исследует не только свойства распределения случайного процесса X_t, но и находит свойства траекторий этого случайного процесса. Заметим еще раз, что случайный процесс определялся как параметризованное семейство вероятностных мер; *потраекторное* исследование поведения случайного процесса до работ Дёблина привлекало только физиков.

---

[25] *Doob, J. L.* Stochastic Processes. New York: John Wiley & Sons, 1953 (см. также: *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностранной литературы, 1956).

[26] *Doeblin.* Sur l'équation de Kolmogoroff... (1938); *Doeblin.* Sur certains mouvements...; *Doeblin.* Sur l'équation de Kolmogoroff... (1940); *Doblin, V.* Sur les mouvements mixtes // CRAS. 1940. T. 210. P. 690–692.



Recherches sur l'équation de Kolmogoroff *)

Définition de l'équation de Kolmogoroff. Considérons une particule mobile se mouvant aléatoirement sur la droite (ou sur un segment de droite). Supposons qu'il existe une probabilité F(x, y; s, t) bien définie pour que la particule se trouvant à l'instant s dans la position x se trouve à l'instant t (>s) à gauche de y, probabilité indépendante du mouvement antérieur de la particule. Nous supposerons F(x, y; s, t) mesurable (B) par rapport

Первая страница рукописи В. Дёблина Sur l'équation de Kolmogoroff (Göbel, S. The Mathematician Wolfgang Doeblin (1915–1940) – Searching the Internet // A Focus on Mathematics (Knowledge Management in Mathematics – 140 Years of Information on World-wide Literature) / B. Wegner (ed.). 2008. P. 33)

В последней своей заметке [27] Дёблин определяет свойство перемешивания траекторий решения уравнения Колмогорова; сейчас условие перемешивания играет важную роль в эргодической теории.

Все заметки, за исключением заметок последней группы, имели своим продолжением публикации в журналах. Доказательство анонсированных в этих заметках фактов Дёблин опубликовать не успел.

Однако среди публикаций Дёблина в журналах есть две статьи, результаты которых не были анонсированы в заметках.

Каплинг-метод. В работе, опубликованной в периферийном журнале [28], был предложен метод «склеивания» *однородных* марковских процессов для получения оценки скорости сходимости распределения процесса к стационарному распределению. Принцип этого метода заключается в следующем.

Пусть марковский процесс X_t^Z, стартовавший из состояния Z в момент времени t, имеет распределение P_t^Z. Для двух независимых марковских процессов $X_t = X_t^{X_0}$, $Y_t = X_t^{Y_0}$, стартовавших из состояний X_0 и Y_0, положим

[27] *Doblin.* Sur les mouvements mixtes...
[28] *Doeblin.* Exposé de la Théorie des Chaînes...

$\tau(X_0, Y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 \colon X_t = Y_t\}$ – момент времени, когда эти процессы впервые совпали. Тогда выполнено основное неравенство каплинга:

$$|P_t^{X_0}(A) - P_t^{Y_0}(A)| = |\mathrm{E}_{X_0}(1(X_t \in A) - 1(Y_t \in A))1(t \le \tau(X_0, Y_0))| +$$

$$+|\mathrm{E}_{X_0}(1(X_t \in A) - 1(Y_t \in A))1(t > \tau(X_0, Y_0))| \le$$

$$\le \mathrm{E}_{X_0} 1(t \le \tau(X_0, Y_0)) = \mathrm{P}_{X_0}\{t \le \tau(X_0, Y_0)\}.$$

Если (i) известна равномерная оценка $\mathrm{P}\{t \le \tau(X_0, \mathrm{Y}_0)\} \le C$ или (ii) известна оценка $\int_X \mathrm{E}\,\varphi(\tau(X_0, Y_0))\mathrm{P}(dY_0) \le Q(X_0)$ для положительной неубывающей функции $\varphi(t)$, то по неравенству Маркова

$$\left\| \mathrm{P}_t^{X_0} - \mathrm{P} \right\|_{TV} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{A \in \mathrm{B}} \left| \mathrm{P}_t^{X_0}(A) - \mathrm{P}(A) \right| \le \begin{cases} \dfrac{C}{t} & (i); \\ \dfrac{Q(X_0)}{\varphi(t)} & (ii), \end{cases}$$

где $\left\| \mathrm{P}_t^{X_0} - \mathrm{P} \right\|_{TV}$ – расстояние межу мерами $\mathrm{P}_t^{X_0}$ и P в метрике полной вариации.

Используя каплинг-метод, для конечной марковской цепи Дёблин получил:

$$\mathrm{P}\{n < \tau(X_0, Y_0)\} \le (1 - \min(p_{i,j}))^n;$$

величина $q \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \min(p_{i,j})$ называется *коэффициент эргодичности*.

На самом деле для точной оценки скорости сходимости конечной марковской цепи с положительными элементами переходной матрицы величина q такова:

$$q = 1 - \min_{i,j} \sum_{s=1}^{n} \min(p_{i,s}, p_{j,s}).$$

Сейчас под коэффициентом эргодичности для действительной матрицы $A = \left\| a_{i,j} \right\|_{n \times n}$ понимается величина $q(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{s=1}^{n} |a_{i,s} - a_{j,s}|$.

Фактически коэффициент эргодичности впервые был использован Марковым (1906) для демонстрации сжимающего свойства стохастической матрицы P: если $\vec{z} = P\vec{w}$, то

$$\max_{i,j} |z_i - z_j| \le q(P) \max_{i,j} |w_i - w_j|.$$

Позднее значительный вклад в теорию коэффициента эргодичности сделали после 1950 г. Р. Л. Добрушин (1929–1995), А. Хайнал (*András Hajnal*) и Т. А. Сарымсаков.

Упомянутая работа Дёблина была замечена исследователями только в последней трети XX в. Сейчас изобретенный им каплинг-метод (метод склеивания случайных марковских процессов) активно применяется как для оценки скорости сходимости распределения процесса к стационарному распределению, так и для оценки расстояния между распределениями процессов с близкими переходными вероятностями [29].

Метрическая теория цепных дробей: задача Гаусса. Эта задача была сформулирована (и, возможно, решена – данных об этом нет) К. Ф. Гауссом (*Johann Carl Friedrich Gauss*, 1777–1855). Она была связана с оценкой погрешности при использовании приближений иррациональных чисел цепными дробями. Цепная дробь, представляющая иррациональное число, может быть построена следующим образом.

Пусть $\Omega = \{[0, 1] \setminus \mathbb{Q}\}$. Обозначим $\phi\colon \Omega \to \Omega, \phi(\omega) \overset{\text{def}}{=} \left\{\frac{1}{\omega}\right\}$, $\omega \in \Omega$; $\psi(\omega) \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{\omega}\right]$, $a_k(\omega) \overset{\text{def}}{=} \psi(\phi^k(\omega))$. Тогда

$$\omega = [a_1(\omega), a_2(\omega), a_3(\omega), \dots] = \cfrac{1}{a_1(\omega) + \cfrac{1}{a_2(\omega) + \cfrac{1}{a_3(\omega) + \dots}}}.$$

В вычислениях используется округление цепной дроби, т. е. бесконечная цепная дробь заменяется конечной $\omega \approx [a_1(\omega), a_2(\omega), a_3(\omega), \dots, a_{n-1}(\omega)]$, и возникает вопрос об оценке отброшенной части дроби $z_n(\omega) \overset{\text{def}}{=} [a_n(\omega), a_{n+1}(\omega), \dots] \in [0,1]$. Гаусс предположил, что лебегова мера L множества $M_n(x) \overset{\text{def}}{=} \{\omega\colon z_n(\omega) < x\}$ (для x $\in$ [0, 1]) такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} L(M_n(x)) = \log_2(x+1)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} L(M_n(A)) = \gamma(A) = \int\limits_A \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln 2}$ для измеримого множества $A \subseteq \Omega$. Также Гаусс ставил задачу оценить величину $\Delta_n(x) \overset{\text{def}}{=} |L(M_n(x)) - \log_2(x+1)|$.

Эта задача была решена Р. О. Кузьминым [30] и П. Леви [31]; обоими были получены оценки для $\Delta_n(x)$.

---

[29] *Lindvall.* Lectures on the Coupling Method…

[30] *Кузьмин Р. О.* Об одной задаче Гаусса // Доклады АН СССР. Сер. А. 1928. С. 375–380.

[31] *Lévy, P.* Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d’une fraction continue // Bulletin de la Société mathématique de France. 1929. T. 57. P. 178–194. См. также: *Lévy, P.* Fractions continues aléatoires // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1952. T. 1. No. 2. P. 170–208; *Lévy, P.* Sur le développement en fraction continue d’un nombre choisi au hasard // Compositio mathematica. 1936. T. 3. P. 286–303.

Леви предложил вероятностный подход к оценке меры множества $M_n(x)$. Эта его идея была развита Дёблином в работе 1940 г. [32] (краткий анонс работы был сделан на заседании *SMF* [33]): предположив, что ω – случайная величина, равномерно распределенная на $\Omega = \{[0, 1] \setminus \mathbb{Q}\}$ он рассматривал последовательность $a_1(\omega), a_2(\omega), a_3(\omega), \ldots$ как последовательность случайных величин на (Ω, B (Ω)) Дёблин установил, что $\{a_n(\omega)\}$ строго стационарна по мере γ и, кроме того, эта последовательность *экспоненциально* ϕ*-перемешивающая по мере* γ (и по другим вероятностным мерам, включая *L*), т. е.

$$|\gamma(A_1 \cap A_2) - \gamma(A_1)\gamma(A_2)| \leq a\theta^n \gamma(A_1)\gamma(A_2)$$

для любых $A_1 \in \sigma(a_1, \ldots, a_k)$, $A_2 \in \sigma(a_{k+n}, a_{k+n+1}, \ldots)$ и некоторых $\theta < 1,\ a > 0$.

Pli cacheté

Как уже говорилось, во время службы в армии Дёблин не прекращал своих научных исследований. Активно переписываясь с коллегами-математиками, а также с родными, он отправлял им информацию о том, что ему удалось сделать. Во время службы в армии Дёблин переписывался со своим братом Петером, и некоторые его заметки оказались в Филадельфии, однако содержали они лишь неясные намеки на сделанную работу; в них не было строгих доказательств. Содержание этих записок, а также других писем Дёблина говорили о том, что за время службы в армии ему удалось достаточно сильно продвинуться в решении задач, о которых он беседовал со своими коллегами в довоенное время и которые были анонсированы в ряде публикаций [34].

В начале 1940 г. Дёблин передал в Академию наук свою рукопись. Он полагал ее настолько важной, что просил рассмотреть этот текст на заседании академии. Однако обстоятельства сложились так, что конверт с рукописью не был вскрыт и позднее попал в университетский архив в составе фонда Мориса Фреше.

Многие специалисты в области теории вероятностей предполагали, что эта рукопись содержит аккуратные формулировки и хотя бы схемы доказательств тех фактов, о которых говорилось в отправленных брату и коллегам письмах, а также в анонсах, сделанных Дёблином на заседаниях Французского математического общества перед призывом в армию. В частности, об этом писал коллега и учитель Дёблина Леви [35].

О хранящейся в университетском архиве рукописи Дёблина говорилось и на посвящённой его наследию конференции в 1991 г. [36] Однако доступ к фон-

---

[32] *Doeblin.* Remarques sur la théorie métrique .... (1940).

[33] *Doeblin*. Remarques sur la théorie métrique ... (1938).

[34] *Doeblin.* Sur l'équation de Kolmogoroff ... (1938); *Doeblin.* Sur certains mouvements...; *Doeblin, W.* Sur l'équation de Kolmogoroff ... (1940); *Doblin, V.* Sur les mouvements mixtes...

[35] *Lévy, P.* Le dernier manuscrit inédit de Wolfgang Doeblin // Bulletin des sciences mathématiques. 1956. T. 80. P. 4.

[36] См.: Doeblin and Modern Probability / H. Cohn (ed.). Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1993 (Contemporary Mathematics. Vol. 149).

ду Мориса Фреше исследователи смогли получить только в 2000 г., получив разрешение родственников ученого. *Pli cacheté*, или «запечатанное почтовое отправление», последняя сохранившаяся рукопись молодого ученого [37], представляло наибольший интерес. Как оказалось, оно содержало рукопись статьи «Об уравнении Колмогорова». Рукопись была опубликована в том же 2000 г. [38]; ее текст предваряет статья Б. Брю (*Bernard Bru*) [39].

В этой работе рассматриваются марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний; предполагается, что поведение процесса X_t описывается переходной функцией $F(x, y; s, t)$, которая равна вероятности того, что в момент времени t процесс X_t окажется в множестве $(-\infty, y)$ при условии, что в момент времени $s < t$ он находился в состоянии x: $F(x, y; s, t) = \mathsf{P}\{X_t < y \mid X_s = x\}$. Уравнение Колмогорова (которое также называлось уравнением Чэпмена (*Sydney Chapman*, 1888–1970) и уравнением Смолуховского) $F(x, y; s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x, y; u, t)\,\mathrm{d}F_z(x, z; s, u)$ – это уравнение, характеризующее *марковское свойство* исследуемого случайного процесса.

Дёблин изучал поведение случайного процесса, определяющегося переходной функцией $F(x, y; s, t)$ в следующих предположениях:

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int\limits_{|y-x|<1}(y-x)\,\mathrm{d}F(x, y; s, t) = a(x, s); \tag{2}$$

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int\limits_{|y-x|<1}(y-x)^2\,\mathrm{d}F(x, y; s, t) = \sigma^2(x, s); \tag{3}$$

$$\lim_{t\to s}\frac{1}{t-s}\int\limits_{|y-x|<\eta}(y-x)\,\mathrm{d}F(x, y; s, t) = o(t-s) \text{ для любых } \eta. \tag{4}$$

Предполагается, что сходимость в пределах (2) – (3) равномерная, $a(x, s)$ и $\sigma^2(x, s)$ непрерывны по a и s на всех конечных интервалах, последняя оценка равномерна по x.

С современной точки зрения случайный процесс с такой переходной функцией является решением стохастического дифференциального уравнения

$$X_t = X_0 + \int\limits_0^t \sigma(X_s, s)\,\mathrm{d}w_s + \int\limits_0^t a(X_s, s)\,\mathrm{d}s \text{ или}$$

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_s, s)\,\mathrm{d}w_s + a(X_s, s)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

---

[37] Напомним, что перед смертью В. Дёблин сжег имевшиеся у него бумаги.

[38] *Doeblin, W.* Sur l’équation de Kolmogoroff // CRAS. Numéro spécial. Syndiquer le contenu. 2000. Sér. 1. T. 331.

[39] *Bru, B.* Notes de lecture du pli cacheté // Ibid. P. 1103–1128.

где w_s – стандартный винеровский процесс, а $\int\limits_0^t \sigma(X_s, s)\,\mathrm{d}\,w_s$ – стохастический интеграл Ито.

Как уже говорилось, винеровский процесс нигде не дифференцируем.

Упрощенно говоря, стохастический интеграл Ито $\int\limits_a^b f(s)\,\mathrm{d}\,w_s$ определяется как предел случайных величин $I_k = \sum\limits_{i=1}^{k} H_i(w_{t_i} - w_{t_{i-1}})$, когда при $\max\limits_i (w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) \to 0$ кусочно-постоянная функция $f_k(s) = H_i$ при $s \in (w_{t_{i-1}}, w_{t_i})$ сходится поточечно к функции $f(s)$ [40].

Исследуя случайные процессы, удовлетворяющие условиям (2) – (4) (а фактически решения уравнения (5), Дёблин, используя, в частности, теорему Леви, определяет свойства этого решения при достаточно простых ограничениях на функции a и σ.

Он исследовал такие свойства решений, как непрерывность функции распределения процесса, непрерывность траекторий процесса, оценил вероятность пересечения траекторией процесса некоторого уровня (или детерминированной кривой), вероятность пересечения двух решений с различными начальными условиями, близость двух траекторий при близких начальных условиях, вероятности больших уклонений и проч.

Кроме того, он доказал свойство перемешивания для решений уравнения Колмогорова (из чего следует их эргодичность). В своем исследовании Дёблин фактически доказывает и использует свойства непрерывных мартингалов (которые незадолго до этого были введены его коллегой Ж. Вилем) – впрочем, слова «мартингал» в тексте нет.

Но больше всего исследователи обнаруженного в архиве рукописного текста были поражены тем, что в этой неизданной работе, написанной с большими помарками, практически в черновике, фактически использовался стохастический интеграл Ито и доказывалась формула Ито, являющаяся основой для построения теории стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Эта формула – формула замены переменной в СДУ. Впервые она была опубликована на японском языке в работе Киёси Ито (*Kiyoshi Itô*, 1915–2008) в 1942 г. [41] и выглядела следующим образом:

$$\int\limits_0^t F'(g(\tau, \omega))\,\mathrm{d}_\tau g(\tau, \omega) = F(g(t, \omega)) - F(g(0, \omega)) - \frac{1}{2}\int\limits_0^t F''(g(\tau, \omega))\,\mathrm{d}\tau,$$

где $g(\tau, \omega)$ – (в современных терминах) стандартный винеровский процесс.

---

[40] Существуют и другие способы определения стохастического интеграла.

[41] *Itô, K.* Zenkoku Sizyo Sugaku Danwakai-si [Differential Equations Determining a Markoff Process] // Journal of Pan-Japan Mathematical Colloquia. 1942. No. 1077. P. 1352–1400.

Об этой формуле Ито сообщил в публикации на английском языке в 1944 г. [42] (без доказательства), и только в публикациях 1950 и 1951 гг. [43] он привел доказательство этой формулы (но уже в более общем виде и для многомерного случая стохастического дифференциального уравнения).

Вот что пишет Дёблин в своей неизданной при жизни работе:

Замена переменной

Пусть $\varphi[x, t]$ – возрастающая по x и непрерывая по (x, t) функция. Положим $Y(t) = \varphi[X(t), t]$. Пусть $G(x, y, s, t)$ – вероятность того, что $Y(t) < y$, если в момент s было $Y(s) = x$.

$G(x, y, s, t)$[44] равна вероятности того, что $X(t) < y'$ при том, что $X(s) = x'\ldots$

Далее он показывает, что G удовлетворяет тем же условиям, что F, но с другими параметрами: A и $\bar{\sigma}$ и

…

$$A = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{|z-Y|<\varepsilon} [z - Y(t)]\, \mathrm{d}_z G(Y(t), z, t, t+\Delta) =$$

$$= \varphi'[X(t), t]\, a(X(t), t) + \varphi_t' \ [X(t), t] + \frac{1}{2}\varphi''[X(t), t]\sigma^2 + \Xi(\Delta)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{|z-Y|<\varepsilon} [z - Y(t)]^2\, \mathrm{d}_z G(Y(t), z, t, t+\Delta) = \varphi'^2[X(t), t]\sigma^2[X(t), t] + \Xi(\Delta)$$

Выражения $\Xi(\Delta)$ в предыдущих формулах стремятся к 0 равномерно по всей области, не содержащей точек сингулярности, где φ_x'[45], φ_x' и φ_t' ограничены, а φ_x', φ_x' непрерывны по t[46].

…

Это утверждение эквивалентно современному виду формулы Ито:

$$\mathrm{d}\left(F\left(X_0 + \int_0^t a(X_t, t)\,\mathrm{d}t + X_0 + \int_0^t \sigma^2(X_t, t)\,\mathrm{d}w_t\right)\right) =$$

$$= \left(F_t'(X_t, t) + F_{X'}\, a(X_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{XX}''(X_t, t)\,\mathrm{d}t\right) + F_X'(X_t, t)\sigma(X_t, t)\,\mathrm{d}w_t;$$

и этот результат Дёблин проиллюстрировал примерами.

Вообще, хранившаяся 60 лет в архиве рукопись, написанная с большим количеством помарок, исправлений и описок в школьных тетрадках, содержит в

---

[42] *Itô, K.* Stochastic Integral // Proceeding of the Imperial Academy (Tokyo). 1944. Vol. 20. P. 519–524.

[43] *Itô, K.* Stochastic differential Equations in a Differentiable Manifold // Nagoya Mathematical Journal. 1950. Vol. 1. P. 35–47; *Itô, K.* On a Formula Concerning Stochastic Differentials // Nagoya Mathematical Journal. 1951. Vol. 3. P. 55–65.

[44] Описка автора: должно быть $F(x', y', s, t)$. Напомним, что рукопись Дёблина – фактически черновик.

[45] В формулах вместо φ_x' и φ_x'' Дёблин пишет φ' и φ''.

[46] *Doeblin, W.* Sur l'équation de Kolmogoroff…(34–35 страницы рукописи), P. 1077–1078.

себе столько новых научных фактов, что их подробное изложение заняло бы несколько больших статей. Это такие факты, как условия существования и единственности решения уравнения Колмогорова, его связь с дифференциальными уравнениями в частных производных, непрерывная зависимость решения уравнения Колмогорова от коэффициентов, строгая оценка приращения траектории решения уравнения Колмогорова и ее предельный вариант – локальная лемма о повторном логарифме, оценки числовых (средних) характеристик решения, представление решения как суммы детерминированной функции и мартингала и т. п.

Эти результаты затем были заново открыты и доказаны в течение последующих 30 лет усилиями ведущих математиков планеты.

Заключение

Молодой математик и его работы не были забыты коллегами. В послевоенные годы появились статьи, посвященные его жизни и научной деятельности [47]. Научное наследие Дёблина оказало огромное влияние на дальнейшее развитие теории вероятностей и вероятностных методов в теории чисел. Многие его результаты впоследствии обобщались, они до сих пор востребованы как важный теоретический аппарат научного исследования. Кроме того, чрезвычайно полезным оказался ряд технических приемов, применявшихся Дёблином в доказательствах. Во многих монографиях использовались результаты Дёблина, на что указывалось авторами известных монографий, например, Дж. Л. Дубом [48] и Т. Линдвеллом [49]; результаты Дёблина были использованы в монографиях В. Феллера (*William Feller*, 1906–1970), М. Лоэва и др. Изложению и развитию идей Дёблина посвящено большое количество публикаций, первые из которых начали появляться в начале второй половины XX в. [50]. Открытая 15 лет назад неизданная рукопись Дёблина до сих пор изучается; возможно, открывшиеся

---

[47] См.: *Bru, B.* Doeblin's Life and Work from His Correspondence…; *Bru, B.* La vie et l'œuvre de W Doeblin (1915–1940) d'après les archives parisiennes // Mathématiques, informatique et sciences humaines. 1992. T. 119. P. 5–51; Doeblin and Modern Probability…; *Döblin, A.* Autobiographische Schriften und letzte Aufzeichnungen. Olten: Walter-Verlag, 1980; *Lévy.* Wolfgang Doeblin … *Lévy, P.* Wolfgang Doeblin (V. Doblin) (1915–1940) // Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1955. T. 8. No. 2. P. 107–115; *Lévy, P.* Le dernier manuscrit inédit de Wolfgang Doeblin // Bulletin des sciences mathématiques. 1956. T. 80. P. 4; *Lindvall,* W. Doeblin, 1915–1940…; *Lindvall, T.* Sannolikheten och öder. Om matematikern Wolfgang Doeblin // Ord & Bild. 1993. Bd. 6. S. 48–57.

[48] *Doob.* Stochastic processes...

[49] *Lindvall, T.* Lectures on the Coupling Method. New York: J. Willey and Sons, 1992, 2002.

[50] См.: *Charmasson, T., Méchine, S., Petit, M.* Archives et manuscrits de Wolfgang Doeblin // Revue d'histoire des sciences, 2005. T. 58. No. 1. P. 225–236; *Chung, K. L.* Doeblin's Big Limit Theorem // Journal of Theoretical Probability. 1993. Vol. 6. No. 3. P. 417–426; *Chung, K. L.* The General Theory of Markov Processes According to Doeblin // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1964. Bd. 2. Ht. 3. S. 230–254; *Cohn, H.* On a Paper by Doeblin on Non-Homogeneous Markov Chains // Advances in Applied Probability. 1981. Vol. 13. No. 2. P. 388–401; *Jain, N., Jamison, B.* Contributions to Doeblin's Theory of Markov Chains // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1967. Bd. 8. Ht. 1. S. 19–40; *Kesten, H.* A Sharper Form of the Doeblin – Levy – Kolmogorov – Rogozin Inequality for Concentration Functions // Mathematica scandinavica. 1969. Vol. 25. P. 133–144; *Winkler, W.* Doeblin's and Harris' Theory of Markov Processes // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1975. Bd. 31. Ht. 2. S. 79–88; *Menshikov, M. V., Popov, S.Yu.* Exact Power Estimates for Countable Markov Chains // Markov Processes And Related Fields. 1995. Vol. 1. No. 1. P. 57–78; *MacKay, R. S.* Robustness of Markov Processes on Lange Networks // Journal of Difference Equations and Applications. 2011. Vol. 17. Iss. 8. P. 1155–1167.

Могила В. Дёблина во время траурной церемонии 21 мая 2015 г. (фото Юргена Эллингхауза)

там идеи великого математика будут использованы и в дальнейших исследованиях. После ее открытия наблюдается новый всплеск интереса к Дёблину: его история привлекла внимание не только историков математики, но и популяризаторов истории науки. За короткое время были изданы новые посвященные Дёблину обзоры и историко-научные исследования [51], а также научно-популярные издания [52]; были сняты документальные фильмы о его судьбе [53].

В ноябре 1991 г. в Блауберне (Германия) была проведена международная конференция «Пятьдесят лет после Дёблина: развитие теории марковских цепей, марковских процессов и сумм случайных величин» (*Fifty Years after Doeblin: Developments in the Theory of Markov Chains, Markov Processes, and Sums of Random Variables*), в которой участвовали ведущие специалисты по теории вероятностей, а также по вероятностным методам в теории чисел: Чжун Кай-Лай, Т. Лиггет (*Thomas M. Ligget*), Г. Ториссон (*Hermann Thorisson*), М. Иосифеску (*Marius Iosifescu*) и др. По материалам конференции был издан сборник работ [54], начинающийся большой статьей Брю о жизни Дёблина, его достижениях и о его сотрудничестве с другими учеными [55].

Во Франции с 2004 г. действует научное общество имени Дёблина (*Fédération de recherche Wolfgang Doeblin*), созданное с целью координации исследователей различных направлений. В 2011 г. «Общество математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли» учредило приз имени В. Дёблина, который присуждается молодым математикам за исследования в области теории вероятностей. В 2015 г. в связи со столетием Дёблина в нашей стране состоялись научные семинары, посвященные этому юбилею.

К сожалению, ни во Франции, ни в Германии не отмечалось столетие со дня рождения гениального математика; возможно, причиной этому был безвременный уход из жизни Марка Йора (*Marc Yor*, 1949–2014), профессора

---

[51] См.: *Bru, B., Yor, M.* Comments on the Life and Mathematical Legacy of Wolfgang Doeblin // Finance and Stochastics. 2002. Vol. 6. No. 1. P. 3–47; Lettre de l'Académie des sciences. 2001. No. 2; *Charmasson, Méchine, Petit*. Archives et manuscrits...; *Mazliak.* On the Exchanges Between Wolfgang Doeblin...; *Mazliak.* Ten Letters from Wolfgang Doeblin...

[52] *Petit, M.* L'affaire Doeblin: Alfred, Wolfgang et quelques autres regards croisés sur l'expérience creatrice // Mathématiques et sciences humaines / Mathematics and Social Sciences. 2006. No. 176. P. 13–21; *Petit, M.* L'Équation de Kolmogoroff. Vie et mort de Wolfgang Doeblin, un génie dans la tourmente. Paris: Ramsay, 2003.

[53] *Willems, A. and H.* Wolfgang Doeblin: A Mathematician Rediscovered. Documentary of the Famous Mathematician Wolfgang Doeblin // Springer VideoMATH. Springer, 2007; *Ellinghaus, J., Ters, C.* "La marche aléatoire du soldat Doblin – Parcours d'un combattant". Documentaire par J. Ellingshaus et C. Ters, diffusé par France Culture le 25 juillet 2011, 57 minutes (этот фильм также имеет аудиоверсию, доступную в Интернете).

[54] Doeblin and Modern Probability…

[55] *Bru.* Doeblin's Life and Work from His Correspondence…

Университета им. Пьера и Марии Кюри (Париж-VI), известного специалиста в области случайных процессов. Именно он совместно с историком науки Брю подготовил к публикации и прокомментировал *Pli cacheté*, сотрудничал с режиссерами документальных фильмов о Дёблине, популяризировал его наследие. Однако усилиями сельской общины, родственников и неравнодушных людей в деревне Усра 21 июня 2015 г. состоялась траурная церемония, посвященная 75-летию гибели героя этой статьи. Также в некоторых европейских университетах прошли показы документальных фильмов о нем.

Автор благодарит Д. А. Баюка, О. Б. Шейнина, Ю. С. Хохлова и редакцию ВИЕТ за ценные замечания, которые способствовали улучшению текста статьи, а также выражает глубокую признательность А. Ю. Веретенникову за инвормацию о В. Дёблине и Е. А. Асарину за помощь при подготовке статьи.

References

Bachelier, L. (1900) Théorie de la spéculation, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 3, no. 17, pp. 21–86.

Bru, B. (1992) La vie et l'œuvre de W Doeblin (1915–1940) d'après les archives parisiennes, *Mathématiques, informatique et sciences humaines*, vol. 119, pp. 5–51.

Bru, B. (1993) Doeblin's Life and Work from His Correspondence, in: Cohn, H. (ed.) *Doeblin and Modern Probability*, Providence, R.I.: American Mathematical Society, pp. 1–64 (Contemporary Mathematics, vol. 149).

Bru, B. (2000) Notes de lecture du pli cacheté, *CRAS,* Numéro spécial, Syndiquer le contenu, sér. 1, vol. 331, pp. 1103–1128.

Bru, B. (2009) Reiew: L'Équation de Kolmogoroff. Vie et mort de Wolfgang Doeblin, un génie dans la tourmente, by Marc Petit (translated by Chandler Davis), *The Mathematical Intelligencer*, vol. 31, no. 2, pp. 61–65.

Bru, B., Yor, M. (2001) La vie de W. Doeblin et le pli cacheté 11668, *La lettre de l'Académie des sciences*, no. 2, pp. 15–17.

Bru, B., Yor, M. (2002) Comments on the Life and Mathematical Legacy of Wolfgang Doeblin, *Finance and Stochastics*, vol. 6, no. 1, pp. 3–47.

Bru, B., Yor, M. (2002) Wolfang Doeblin et le pli cacheté 11668, *MATAPLI*, no. 68, pp. 75–92.

Charmasson, T., Méchine, S., Petit, M. (2005) Archives et manuscrits de Wolfgang Doeblin, *Revue d'histoire des sciences*, vol. 58, pp. 225–236.

Chung, K. L. (1964) The General Theory of Markov Processes According to Doeblin, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, vol. 2, no. 3, pp. 230–254.

Chung, K. L. (1993) Doeblin's Big Limit Theorem, *Journal of Theoretical Probability*, vol. 6, no. 3, pp. 417–426.

Cohn, H. (1981) On a Paper by Doeblin on Non-Homogeneous Markov Chains, *Advances in Applied Probability*, vol. 13, no. 2, pp. 388–401.

Cohn, H. (ed.) (1993) Doeblin and Modern Probability. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1993 (Contemporary Mathematics, vol. 149).

Döblin, A. (1980) *Autobiographische Schriften und letzte Aufzeichnungen*. Olten: Walter-Verlag.

Doblin, V. (1940) Sur les mouvements mixtes, *CRAS*, vol. 210, pp. 690–692.

Doblin, W. (1940) Elément d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure,* vol. 57, pp. 61–111.

Doeblin, W. (1936) Sur certaines propriétés asymptotiques de l'équation de Smoluchowski, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances,* p. 29.

Doeblin, W. (1936) Sur certaines propriétés asymptotiques de l'équation de Smoluchowski, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances*, p. 29.

Doeblin, W. (1936) Sur certains résultats de MM. Fréchet et Hadamard, *Société mathématique de france. Comptes rendus des séances,* p. 31.

Doeblin, W. (1936) Sur les chaînes de Markoff, *CRAS,* vol. 203, pp. 1210–1211.

Doeblin, W. (1936) Sur les chaînes de Markoff, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances,* p. 34.

Doeblin, W. (1936) Sur les chaînes discrètes de Markoff, *CRAS,* vol. 203, pp. 24–26.

Doeblin, W. (1936) Sur les noyaux stochastiques, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances*, p. 31.

Doeblin, W. (1936) Sur les noyaux stochastiques, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances*, p. 31.

Doeblin, W. (1936) Sur les probabilités en chaîne, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances,* pp. 28–29.

Doeblin, W. (1937) Eléments d'une théorie générale des chaînes constantes simples de Markoff, *CRAS,* 205, pp. 7–9.

Doeblin, W. (1937) L'équation de Smoluchowski, *Praktikà tês Akademías Athēnōn*, vol. 12, pp. 116–119.

Doeblin, W. (1937) Le cas discontinu des probabilités en chaîne, *Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk,* no. 236, pp. 3–13, 592 (corrections).

Doeblin, W. (1937) Sur l'extension de quelques théorèmes de Frobenius et Jentzsch, *Société Mathématique de France. Comptes rendus des séances*, p. 31.

Doeblin, W. (1937) Sur la loi de Gauss et les chaînes dénombrables, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances,* p. 31.

Doeblin, W. (1937) Sur le cas continu des probabilités en chaîne, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei,* vol. 25, pp. 170–176.

Doeblin, W. (1937) Sur les propriétés asymptotiques des mouvements régis par certains types de chaînes simples*, Bulletin mathématique de la Société des sciences vathématiques de Roumanie,* vol. 39, no. 1, pp. 57–115; no. 2, pp. 3–61.

Doeblin, W. (1938) Etude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, *CRAS,* vol. 206, pp. 718–720.

Doeblin, W. (1938) Exposé de la Théorie des Chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'Etats*, Revue mathématique de l'Union interbalkanique,* vol. 2, pp. 77–105.

Doeblin, W. (1938) Premiers éléments d'une étude systématique de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, *CRAS,* vol. 206, pp. 306–308.

Doeblin, W. (1938) Remarques sur la théorie métrique des fractions continues, *Société mathématique de France. Comptes rendus des séances,* pp. 28–29.

Doeblin, W. (1938) Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables, *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 66. pp. 210–220.

Doeblin, W. (1938) Sur l'équation de Kolmogoroff, *CRAS*, vol. 207, pp. 705–707.

Doeblin, W. (1938) Sur l'équation matricielle $A^{(t+s)}=[A^{(t)}A^{(s)}]$ et ses applications aux probabilités en chaînes, Bulletin des sciences mathématiques, vol. 62, pp. 21–32.

Doeblin, W. (1938) Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples, *Théses françaises de l'entre-deux-guerres*, vol. 204, pp. 1–123.

Doeblin, W. (1938) Sur les sommes d'un grand nombre de vecteurs aléatoires, *CRAS,* vol. 207, pp. 511–513.

Doeblin, W. (1939) Sur certains mouvements aléatoires discontinus, *Skandinavisk aktuarietidskrift,* vol. 22, pp. 211–222.

Doeblin, W. (1939) Sur certains mouvements aléatoires, *CRAS*, vol. 208, pp. 249–250.

Doeblin, W. (1939) Sur certains mouvements aléatoires, *CRAS,* vol. 208, pp. 249–250.

Doeblin, W. (1939) Sur les sommes d'un grand nombre de variables indépendantes, *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 63, pp. 23–32, 35–64.

Doeblin, W. (1939) Sur un problème de calcul des probabilités, *CRAS*, vol. 209, pp. 742–743.

Doeblin, W. (1940) Remarques sur la théorie métrique des fractions continues, *Compositio mathematica*, vol. 7, pp. 353–371.

Doeblin, W. (1940) Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, *Studia mathematica,* vol. 9, pp. 71–96.

Doeblin, W. (1940) Sur l'équation de Kolmogoroff, *CRAS*, vol. 210, pp. 365–367.

Doeblin, W. (1940) Sur l'équation matricielle $A^{(t+s)}=[A^{(t)}A^{(s)}]$ et ses applications au calcul des probabilités. Rectification, Bulletin des Sciences Mathématiques, vol. 64, pp. 35–37.

Doeblin, W. (1940) Sur les mouvements mixtes, *CRAS*, vol. 210, pp. 690–692.

Doeblin, W. (1947) Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure,* vol. 63, pp. 317–350.

Doeblin, W. (2000) Sur l'équation de Kolmogoroff, *CRAS,* Numéro spécial, Syndiquer le contenu, sér. 1, vol. 331.

Doeblin, W. and Fortet, R. (1937) Sur les chaînes à liaisons complètes, *Bulletin de la Société mathématique de France,* vol. 65, pp. 132–148.

Doeblin, W. and Lévy, P. (1936) Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement, *CRAS*, vol. 202, pp. 2027–2029.

Doeblin, W., Fortet, R. (1937) Sur deux notes de MM. Kryloff et Bogoliouboff, *CRAS,* vol. 204, pp. 1699–1701.

Doob, J. L. (1953) *Stochastic Processes*. New York: John Wiley & Sons.

Ellinghaus, J. and Ters, C. (2011) “La marche aléatoire du soldat Doblin – Parcours d’un combattant” – Documentaire par J. Ellingshaus et C. Ters, diffusé par France Culture le 25 juillet 2011, 57 minutes.

Itô, K. (1942) Zenkoku Sizyo Sugaku Danwakai-si [Differential Equations Determining a Markoff Process], *Journal of Pan-Japan Mathematical Colloquia*, no. 1077, pp. 1352–1400.

Itô, K. (1944) Stochastic integral, *Proceeding of the Imperial Academy (Tokyo)*, vol. 20, pp. 519–524.

Itô, K. (1950) Stochastic differential equations in a differentiable manifold, *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 1, pp. 35–47.

Itô, K. (1951) On a Formula Concerning Stochastic Differentials, *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 3, pp. 55–65.

Jain, N. and Jamison, B. (1967) Contributions to Doeblin’s Theory of Markov Chains, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, vol. 8, no. 1, pp. 19–40.

Kesten, H. (1969) A Sharper Form of the Doeblin – Levy – Kolmogorov – Rogozin Inequality for Concentration Functions, *Mathematica scandinavica*, vol. 25, pp. 133–144.

Kolmogoroff, A. N. (1933) *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*. Berlin: Springer (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Bd. 2).

Kuzmin, R. O. (1928) Ob odnoi zadache Gaussa [On One Problem of Gauss], *Doklady Akademii Nauk, ser. A*, pp. 375–380.

Lévy, P. (1929) Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d’une fraction continue., *Bulletin de la Société mathématique de France,* vol. 57, pp. 178–194.

Lévy, P. (1936) Sur le développement en fraction continue d’un nombre choisi au hasard, *Compositio mathematica*, vol. 3, pp. 286–303.

Lévy, P. (1952) Fractions continues aléatoires, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, vol. 1, no. 2, pp. 170–208.

Lévy, P. (1955) Wolfgang Doeblin (V. Doblin) (1915–1940), *Revue d’histoire des sciences et de leurs applications*, vol. 8, no. 2, pp. 107–115.

Lévy, P. (1956) Le dernier manuscrit inédit de Wolfgang Doeblin, *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 80, pp. 61–64.

Lindvall, T. (1991) W. Doeblin, 1915–1940, *The Annals of Probability*, vol. 19, no. 3, pp. 929–934.

Lindvall, T. (1992, 2002) *Lectures on the Coupling Method*. New York: John Willey and Sons.

Lindvall, T. (1993) Sannolikheten och öder. Om matematikern Wolfgang Doeblin, *Ord & Bild*, vol. 6, pp. 48–57.

MacKay, R. S. (2011) Robustness of Markov Processes on Lange Networks, *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 17, no. 8, pp. 1155–1167.

Mazliak, L. (2007) On the Exchanges between Wolfgang Doeblin and Bohuslav Hostinský // Revue d’histoire des mathématiques, vol. 13, no. 1, pp. 155–180.

Mazliak, L. (2007) Ten Letters from Wolfgang Doeblin to Bohuslav Hostinský, Electronic Journal for History of Probability and Statistics, vol. 3, no. 1, pp. 1–15 (http://www.jehps.net/Juin2007/Mazliak-Doeblin.pdf).

Menshikov, M. V. and Popov, S. Yu. (1995) Exact Power Estimates for Countable Markov Chains, *Markov Processes And Related Fields,* vol. 1, no. 1, pp. 57–78.

Petit, M. (2003) *L’Équation de Kolmogoroff. Vie et mort de Wolfgang Doeblin, un génie dans la tourmente*. Paris: Ramsay.

Petit, M. (2006) L’affaire Doeblin: Alfred, Wolfgang et quelques autres regards croisés sur l’expérience creatrice, *Mathématiques et sciences humaines / Mathematics and Social Sciences*, no. 176, pp. 13–21.

Wiener, N. (1958) *Nonlinear Problems in Random Theory*. Cambridge: MIT Press & John Wiley & Sons.

Willems, A. and H. (2007) Wolfgang Doeblin: A Mathematician Rediscovered. Documentary of the Famous Mathematician Wolfgang Doeblin, Springer VideoMATH, Springer.

Winkler, W. (1975) Doeblin’s and Harris’ Theory of Markov Processes, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, vol. 31, no. 2, pp. 79–88.