



Математическое обеспечение  
маршрутной съемки  
труднодоступных участков  
поверхности Земли средствами  
космического мониторинга

М.Ю. Овчинников  
Заведующий сектором  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук

# Содержание

- Актуальные задачи ДЗЗ
- Проблемы построения опорного движения
- Управление угловым движением
- Влияние возмущений на качество решения задачи ДЗЗ
- Заключение

# Дистанционное зондирование Земли

Космическая съемка решает задачи

- прогноза погоды
- мониторинга окружающей среды
- построения карт
- слежения за объектами инфраструктуры
- разведки



# Спутники ДЗЗ



Ресурс-П (ЦСКБ «Прогресс»)

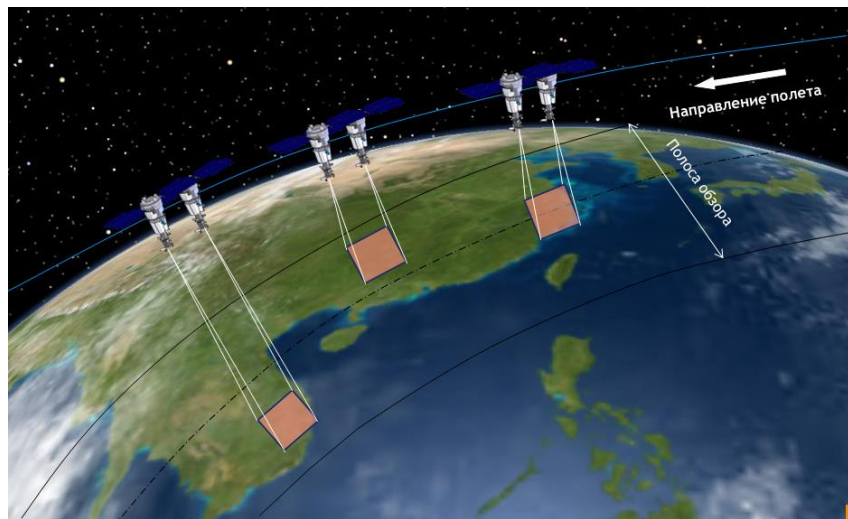
Высота орбиты, км	470-480
Наклонение, градус	97.28
Периодичность наблюдения, сутки	Не более 3
Фокусное расстояние, м	4
Угол поля зрения, градус	5.3
Разрешение в панхроматическом диапазоне, м	1.0
Разрешение в узких спектральных диапазонах, м	3.0-4.0
Полоса захвата, км	38

Высота орбиты, км	618-621
Наклонение, градус	97.98
Периодичность наблюдения, сутки	Не более 1
Фокусное расстояние, м	13.3
Угол поля зрения, градус	1.28
Разрешение в панхроматическом диапазоне, м	0.31
Разрешение в узких спектральных диапазонах, м	1.0-4.0
Полоса захвата, км	13.1



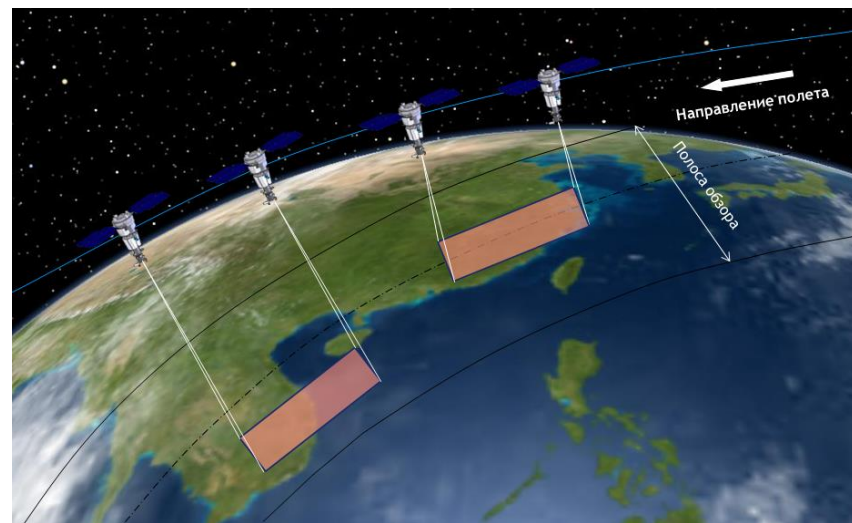
WorldView-3  
(Ball Aerospace  
and  
Technologies)

# Дистанционное зондирование Земли

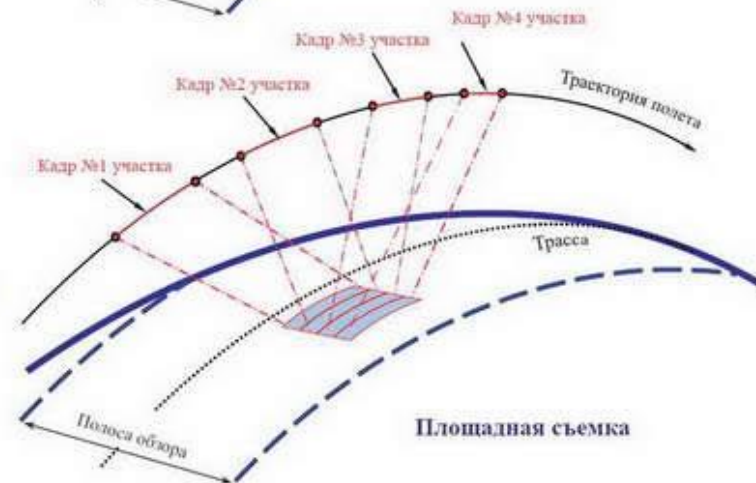
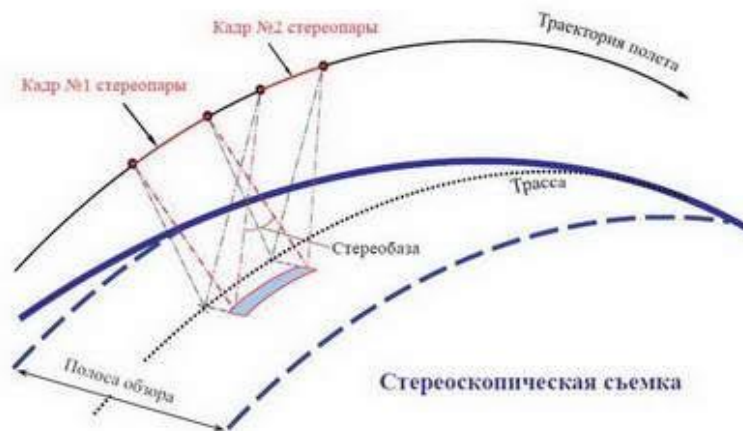
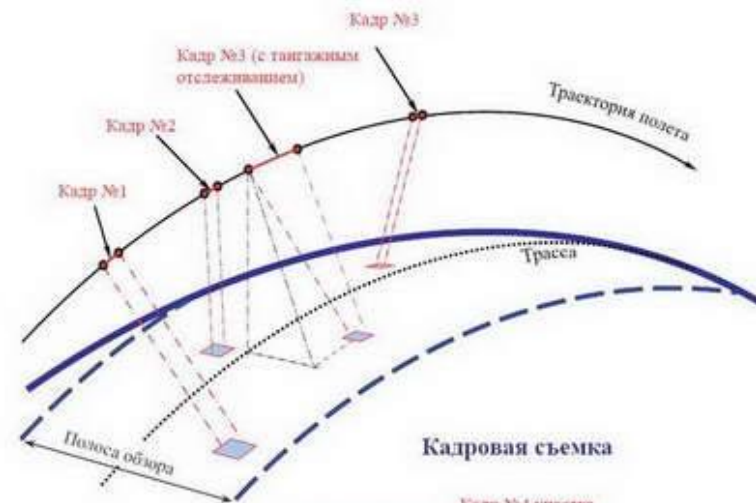
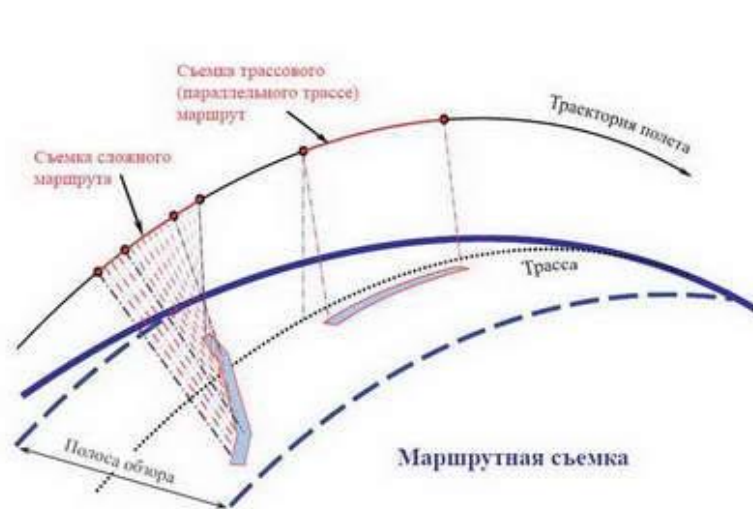


Объектная съемка «Ресурс-П»

Маршрутная съемка «Ресурс-П»



# Виды съемки

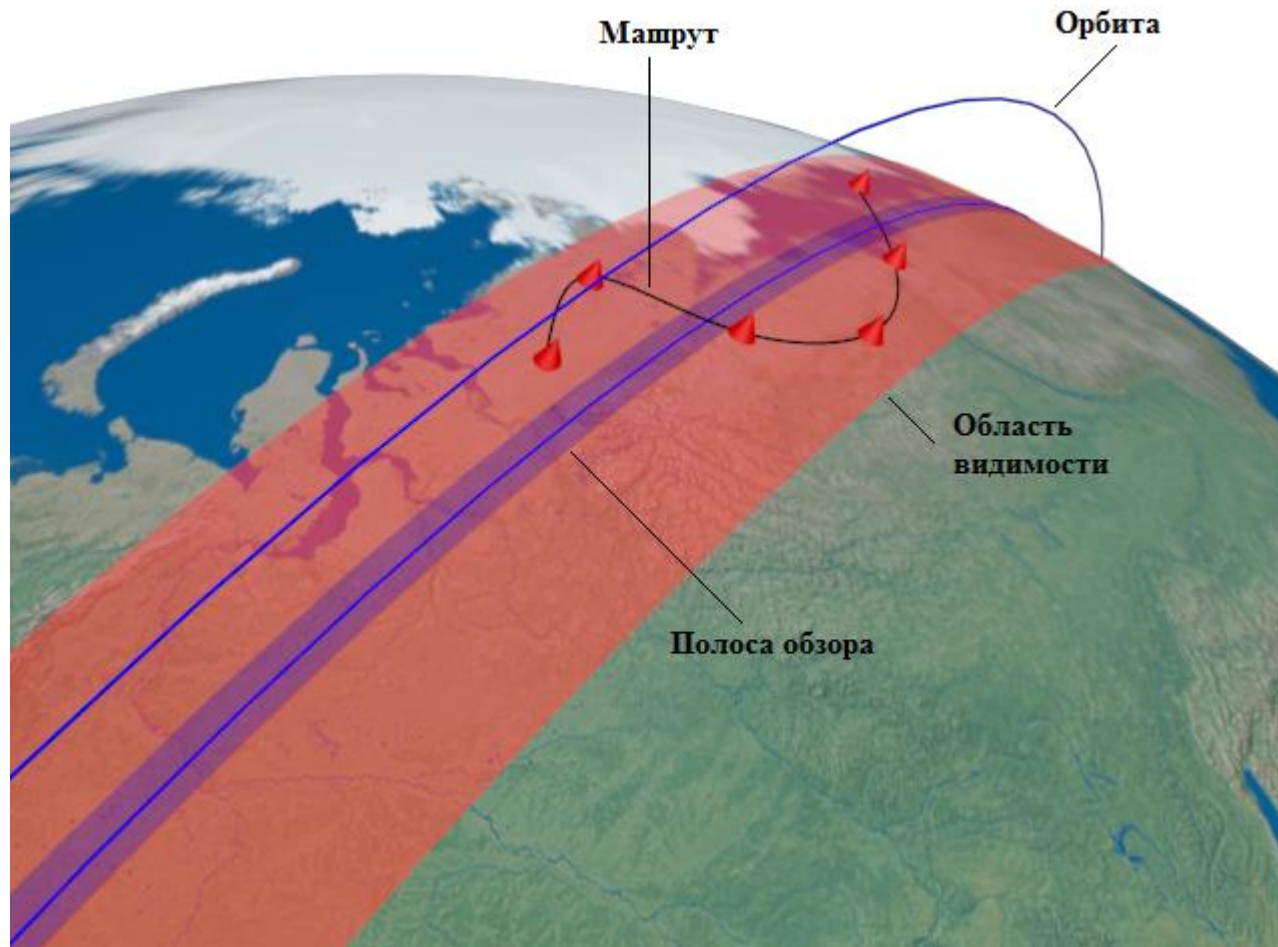


# Новые потребности ДЗЗ в условиях Арктики

- мониторинг состояния протяженных трубопроводов, линий электропередачи, дорог
- состояние границ ледяного покрова на море и реках
- быстропротекающие процессы, линейно распределенные по поверхности Земли, допускающие дистанционный мониторинг и требующие оперативного наблюдения



# Маршрутная съемка



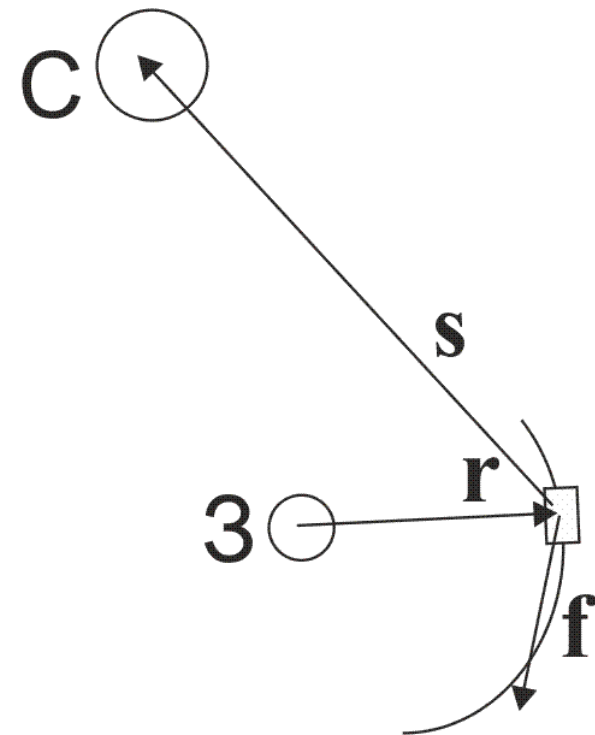
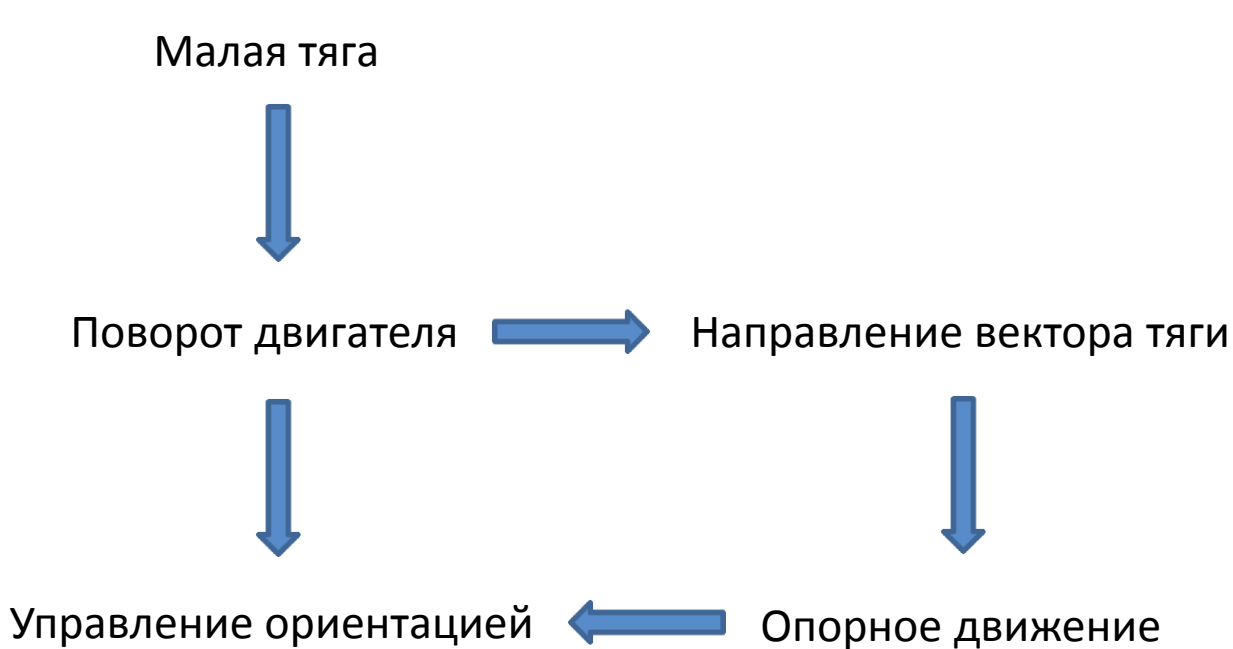
Отслеживание сложных маршрутов на поверхности Земли



# Кандидаты на реализацию маршрутной съемки

- Малогабаритные спутники массой несколько десятков кг:
  - способные к быстрому угловому маневрированию
  - могущие работать в составе группы (формаций и констелляций)
  - подлежащие при необходимости оперативной замене на орбите с использованием легких носителей, запускаемых с северных полигонов

# Ориентация межпланетного КА с двигателем малой тяги

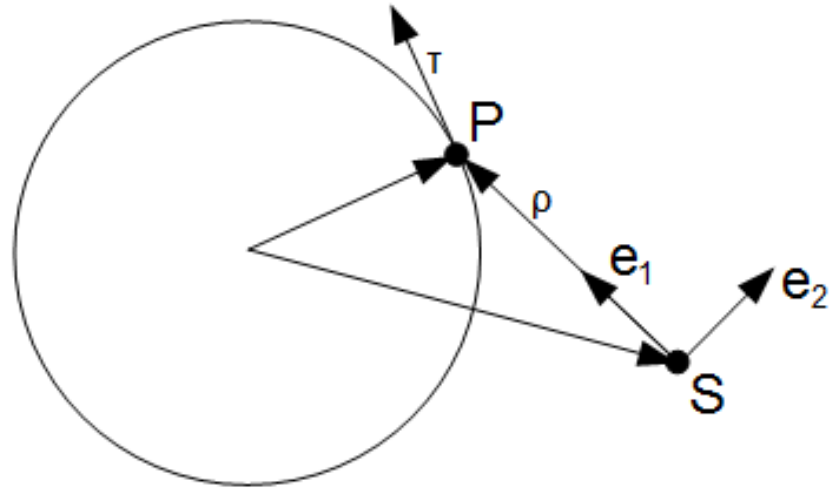


# Синтез углового движения

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s}{\|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s\|} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}, \mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p(t, p(t))$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau})\|}, \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial p}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$



В итоге, можно получить одно уравнение на параметр траектории

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\rho(t, p)V}{f} \frac{1}{(\boldsymbol{\tau}(t, p), \mathbf{e}_2(t, p))}$$

# Синтез углового движения

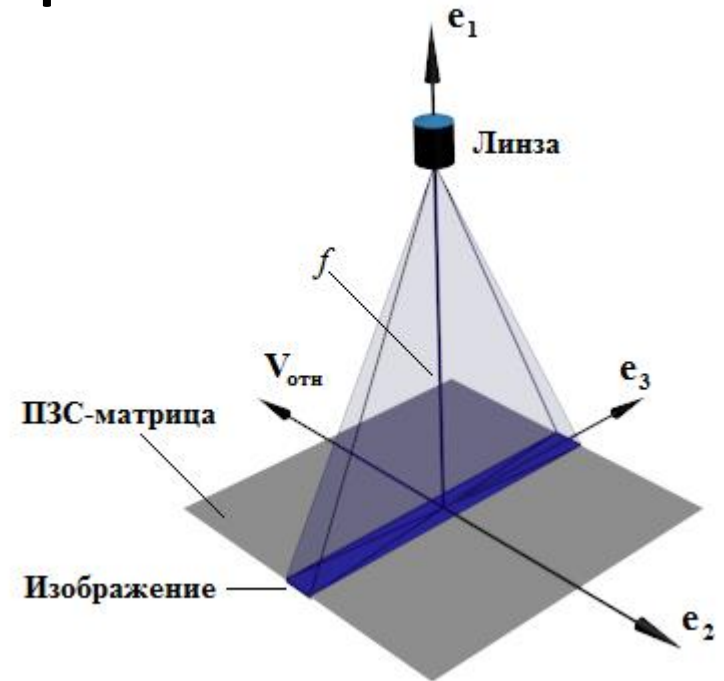
$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_3) &= 0 \\ (\mathbf{V}_{отн}, \mathbf{e}_2) &= -\frac{V\rho}{f} \\ \mathbf{V}_{отн} &= \boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_s) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_3)}{\rho} \\ \omega_3 &= \frac{(\boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{r}_p - \mathbf{V}_s, \mathbf{e}_2)}{\rho} + \frac{V}{f} \end{aligned}$$

Траектория параметризуется параметром  $p(t)$

Для поиска  $\omega_1$  используются уравнения для матриц направляющих косинусов

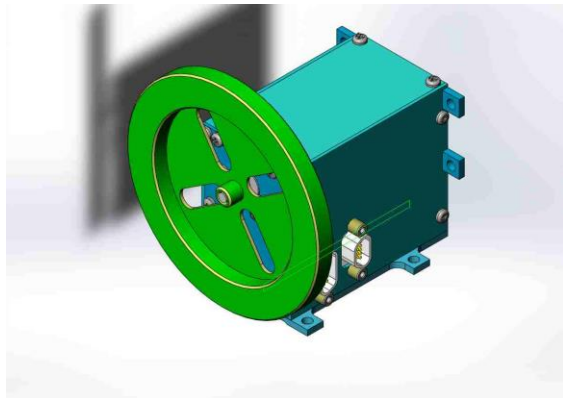
$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{W}\mathbf{B}, \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)^T, \dot{\mathbf{B}} = (\dot{\mathbf{e}}_1 \quad \dot{\mathbf{e}}_2 \quad \dot{\mathbf{e}}_3)^T$$



# Управление угловым движением

Маховики



Ось вращения фиксирована в спутнике  
Угловая скорость вращения переменная  
Относительно простой механизм

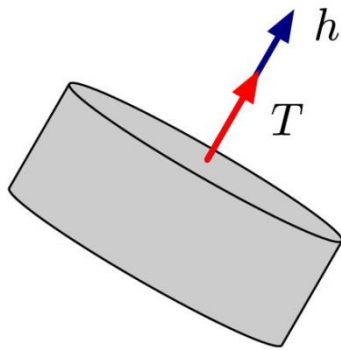
Гиродины



Ось вращения может поворачиваться  
Угловая скорость вращения постоянная  
Сложный механизм

# Управление угловым движением

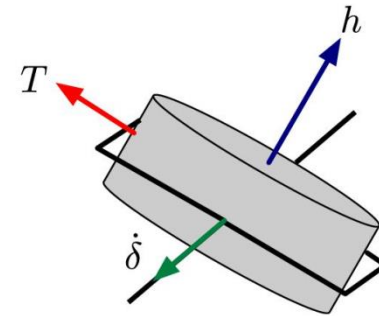
## Маховики



Момент создается при разгоне и торможении

$$\mathbf{T} = -\dot{\mathbf{h}}$$

## Гиродины



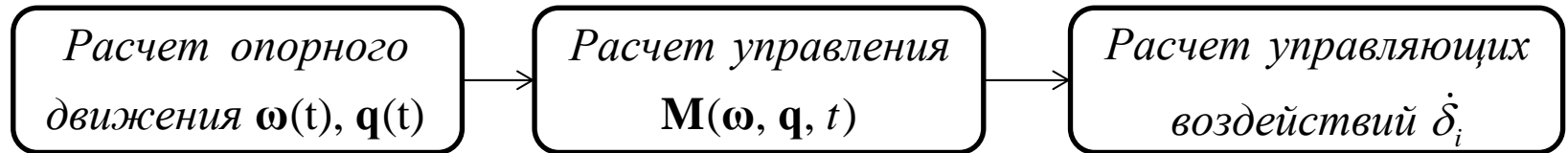
Момент создается при повороте оси вращения

$$\mathbf{T} = -\dot{\delta} \times \mathbf{h}$$

Момент при равной массе и потребляемой мощности значительно больше



# Расчет управления для гиросдинов



Расчетное управление  $M(\omega, q, t)$

$$\mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{M}(\omega, q, t) \quad \dim F = 3 \times n \quad \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{F}^\dagger \dot{\mathbf{H}}$$

$\mathbf{F}^\dagger$  – псевдообратная матрица

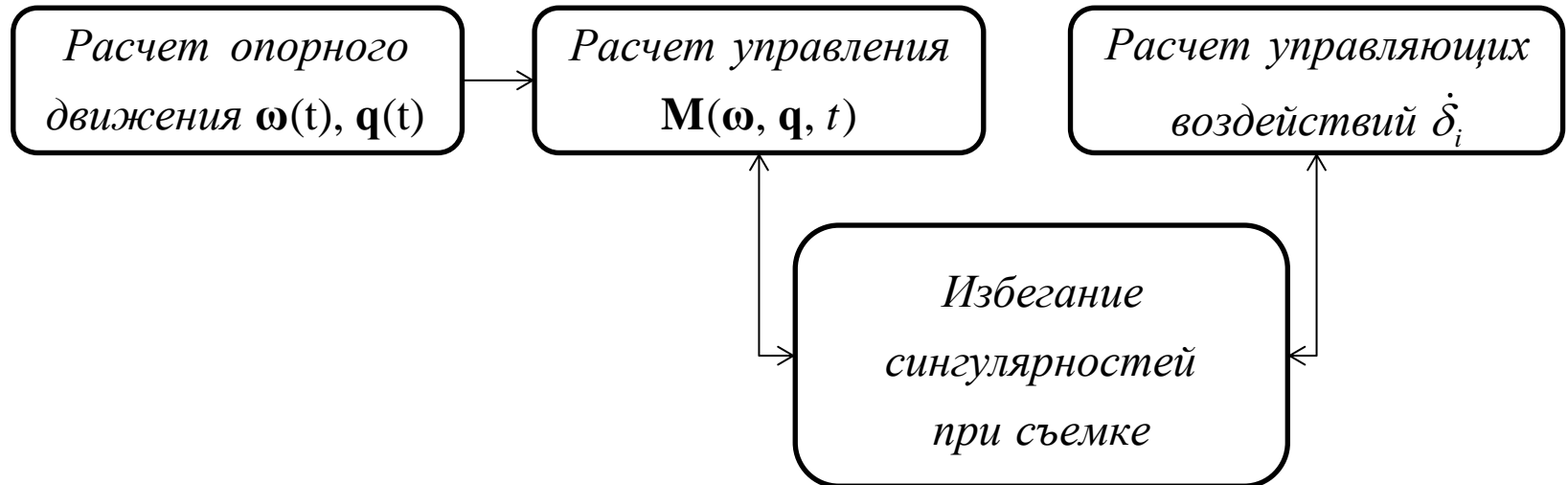
$$\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{F}^T (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} \quad \det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) \neq 0$$

если  $\det(\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = 0$ , то система теряет управляемость



ошибка стабилизации

# Расчет управления для гиродинов



$F\dot{\delta} = M(\omega, q, t)$  недоопределенная система, если число гиродинов больше трех

# Ошибки и качество съемки

Качество съемки

$\delta \mathbf{r}_p$  – ошибка направления на точку обзора (съемка не того, что нужно)

$\delta \mathbf{V}_{отн}$  – ошибка скорость бега изображения («смаз» снимка)

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_p \\ \delta \mathbf{V}_{отн} \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} \delta \psi \\ \delta \omega \\ \delta \mathbf{r}_s \\ \delta \mathbf{V}_s \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{– угловая ошибка (ошибки идентификации + стабилизации)} \\ \text{– ошибка по угловой скорости (идентификация + стабилизация)} \\ \text{– ошибка по орбитальному положению (идентификация)} \\ \text{– ошибка по орбитальной скорости (идентификация)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \delta \psi \\ \delta \omega \end{pmatrix} \text{ – характеризуют качество работы системы ориентации}$$

# Ошибка по направлению

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_p = & \left\{ \mathbf{e}_1 \frac{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_3)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - (\mathbf{r}_s^2 - R^2)}} + \mathbf{e}_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 t \right\} \delta \alpha + \\ & + \left\{ \mathbf{e}_2 t - \mathbf{e}_1 \frac{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_2)}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - (\mathbf{r}_s^2 - R^2)}} - \mathbf{e}_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_2) \right\} \delta \beta + \\ & + \left\{ \mathbf{E}_{3 \times 3} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{r}_s^T}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - (\mathbf{r}_s^2 - R^2)}} - (\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1) \frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T}{\sqrt{(\mathbf{r}_s, \mathbf{e}_1)^2 - (\mathbf{r}_s^2 - R^2)}} \right\} \delta \mathbf{r}_s \end{aligned}$$

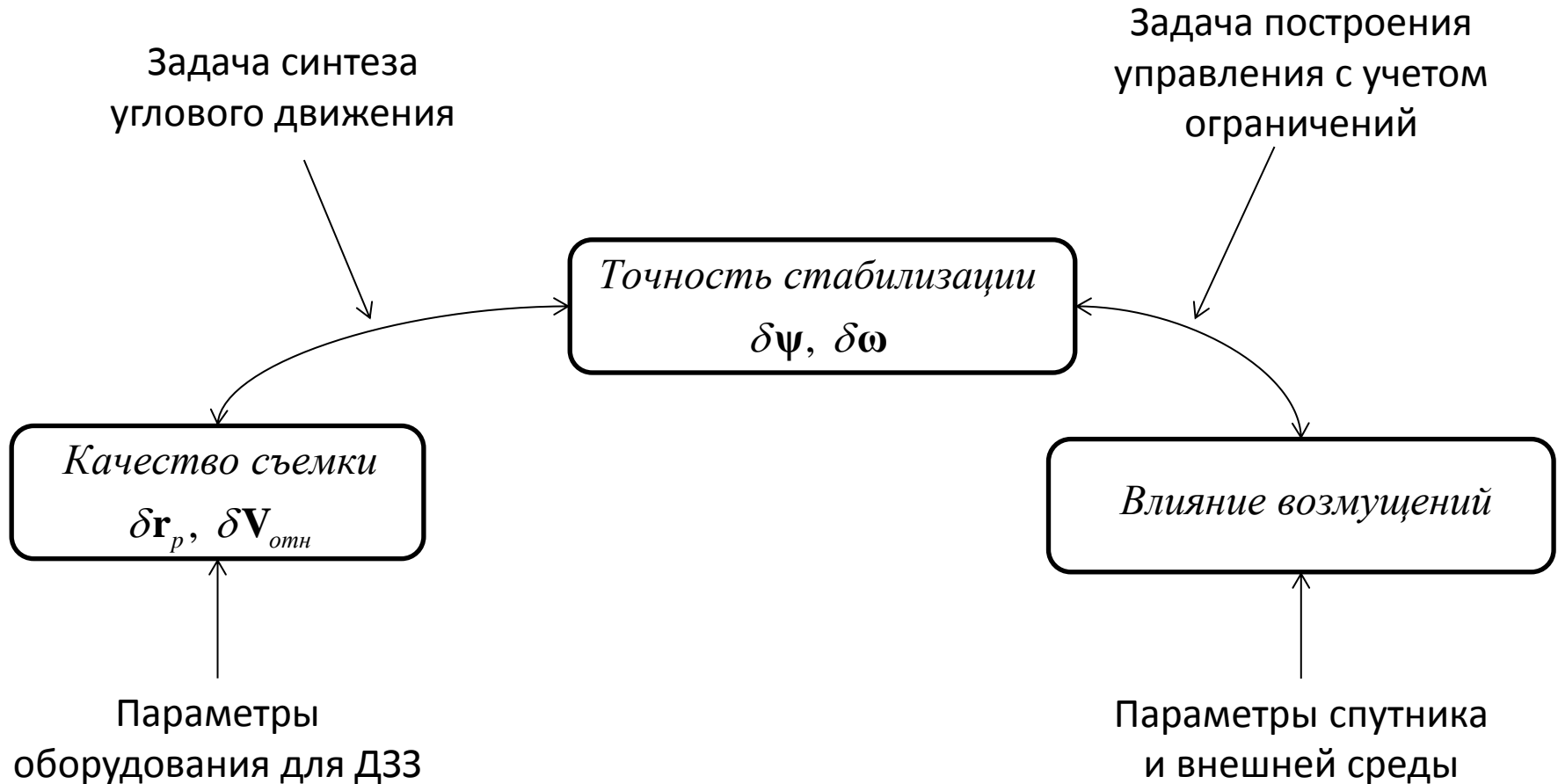
$$| \delta \mathbf{r}_p | \approx | \delta \mathbf{r}_s | + \rho | \delta \psi |$$

# Ошибка по скорости

$$\begin{aligned}
 \delta V_{\parallel} = & \left| \frac{f}{\rho} \mathbf{e}_3^T \{ ([\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{D}_{1-3,1-3} + [\boldsymbol{\rho}]_{\times} \mathbf{A}^T [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{N}) \delta \boldsymbol{\psi} + [\boldsymbol{\rho}]_{\times} \mathbf{A}^T \delta \boldsymbol{\omega} + \right. \\
 & \left. + ([\mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}]_{\times} + [\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{D}_{1-3,7-9}) \delta \mathbf{r}_s - \delta \mathbf{V}_s \} + \frac{f}{\rho} \{ (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_1) \delta \alpha - (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_2) \delta \gamma \} \right| \\
 \delta V_{\perp} = & \left| \frac{f}{\rho} \mathbf{e}_2^T \{ ([\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{D}_{1-3,1-3} + [\boldsymbol{\rho}]_{\times} \mathbf{A}^T [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{N}) \delta \boldsymbol{\psi} + [\boldsymbol{\rho}]_{\times} \mathbf{A}^T \delta \boldsymbol{\omega} + \right. \\
 & \left. + ([\mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}]_{\times} + [\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{D}_{1-3,7-9}) \delta \mathbf{r}_s - \delta \mathbf{V}_s \} - \frac{f}{\rho} (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_1) \delta \beta - \right. \\
 & \left. + (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_2) \frac{f}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}^T \delta \mathbf{r}_s - (\mathbf{V}_{rel}, \mathbf{e}_2) \frac{f}{\rho^3} \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{x} \right|
 \end{aligned}$$

$$| \delta V | \approx f | \delta \boldsymbol{\omega} |$$

# Комплексный подход





# Микроспутник TabletSat

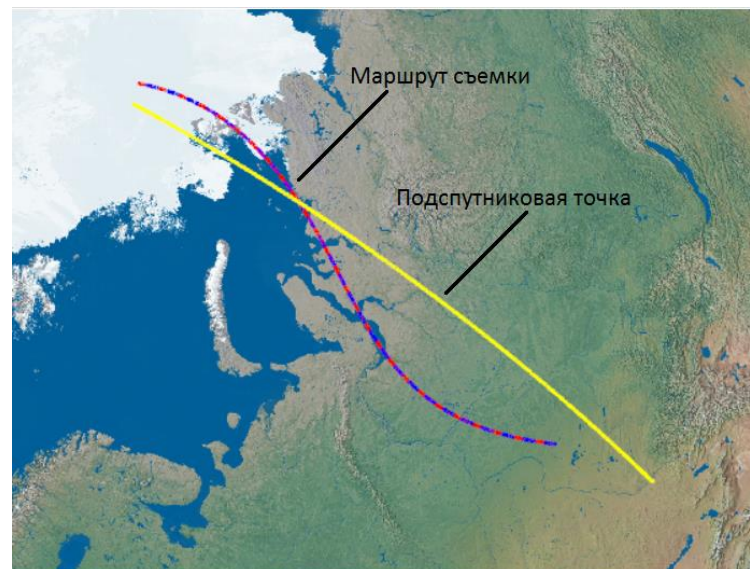
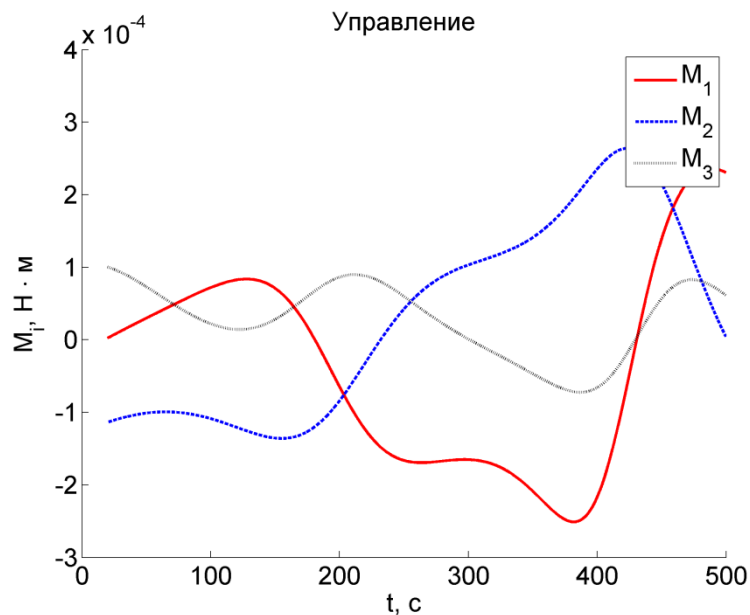
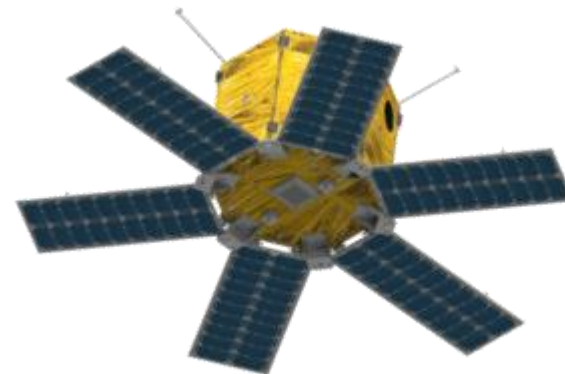
Масса: 26 кг

Перигей: 586.5 км

Апогей: 622.6 км

Разрешение: 15м

Запуск: 19 июня 2014



# Список публикаций

- Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев, А.Е. Шаханов, Р.В. Ельников. Построение углового движения космического аппарата при перелете Земля-Луна. Труды XXXVIII Академических Чтений по космонавтике, Секция “Автоматические космические аппараты для планетных и астрофизических исследований. Проектирование, конструкция, испытания и расчет”, Москва, январь 2014, М.: Комиссия РАН по разработке научн. наследия пионеров освоения космич. пр-ва. 2014, с.523
- Я.В. Маштаков, С.С. Ткачев. Построение углового движения спутника ДЗЗ при отслеживании маршрутов на поверхности Земли. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 20. 31 с.