

О неклассическом операционном методе точечного моделирования и его приложения к управлению динамическими системами

Докладчик:

канд.ф-м.н., доцент СФУ (г. Красноярск)

Осипов Владимир Владимирович

План доклада

1. Идейные основы точечного моделирования
2. Точечные модели задач Коши для дифференциальных уравнений различного вида
3. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость линейных динамических систем как свойства их точечных моделей

1. Идейные основы точечного моделирования

1.1. Точечное представление функций

Для любой ограниченной и кусочно-непрерывной функции $f(\tau) \in M(0,1)$ ставится в соответствии два вектора:

$$f(\tau) \in M(0,1) \xrightarrow{T_1} \bar{f}_{T_1} = \text{Colon} \left[f(\tau_1^{(N)}), \dots, f(\tau_i^{(N)}), \dots, f(\tau_N^{(N)}) \right],$$

$$f(\tau) \in M(0,1) \xrightarrow{T_{II}} \bar{f}_{T_{II}} = \text{Colon} \left[f(0), f(\theta_1^{(N+1)}), \dots, f(\theta_v^{(N+1)}), \dots, f(1) \right],$$

составленные из отсчетов этой функции в узлах ортогональных смежных чебышевских сетках первого и второго рода соответственно:

$$\tau_i^{(N)} = \frac{2i-1}{2N} \quad (i = \overline{1, N}), \quad \theta_v^{(N)} = \frac{v}{N} \quad (v = \overline{0, N}).$$

$$\tau_i^{(N)} = \frac{1}{2} \left[\theta_{i-1}^{(N+1)} + \theta_i^{(N+1)} \right] = \frac{2i-1}{2N} \quad (i = \overline{1, N}) \quad \text{и} \quad \theta_v^{(N+1)} = \frac{1}{2} \left[\tau_v^{(N)} + \tau_{v+1}^{(N)} \right] = \frac{v}{N} \quad (v = \overline{0, N}).$$

Доказано, что смежные точечно – векторные изображения функции $f(\tau)$, непрерывной на $[0,1]$ вместе со своей первой производной и ограниченной второй, связаны равенством

$$(E_N + Z) \cdot \bar{f}_{T_{\text{II}}} + f(0) \cdot \bar{e}_1 = 2 \bar{f}_{T_{\text{I}}},$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} (N \times N); \quad \bar{e}_1 = \text{Colon}[1, 0, \dots, 0].$$

Пусть $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ две функции из $M(0,1)$ а f_T и φ_T – их точечные векторные изображения из , т.е.

$$\left. \begin{aligned} f(\tau) &\xrightarrow{T_N} f_T = \text{Colon} \left[f(\tau_1^{(N)}), \dots, f(\tau_v^{(N)}), \dots, f(\tau_N^{(N)}) \right]; & a) \\ \varphi(\tau) &\xrightarrow{T_N} \varphi_T = \text{Colon} \left[\varphi(\tau_1^{(N)}), \dots, \varphi(\tau_v^{(N)}), \dots, \varphi(\tau_N^{(N)}) \right]. & b) \end{aligned} \right\}$$

Тогда $f(\tau)\varphi(\tau) \xrightarrow{T_N} f_T \otimes \varphi_T = \Phi_T \in R_T^N$, где

$$\Phi_T = \text{Colon} \left[f(\tau_1^{(N)}) \cdot \varphi(\tau_1^{(N)}), \dots, f(\tau_v^{(N)}) \cdot \varphi(\tau_v^{(N)}), \dots, f(\tau_N^{(N)}) \cdot \varphi(\tau_N^{(N)}) \right].$$

Если ввести соответствующие нормы, причем

$$\|f_T\| = \sup_v |f(\tau_v^{(N)})| < \|f\| = \sup_{\tau \in [0,1]} |f(\tau)| \quad \text{и} \quad \|\Phi_T\| = \|f_T \otimes \varphi_T\| \leq \|f_T\| \cdot \|\varphi_T\| \leq \|f\| \cdot \|\varphi\|,$$

то $M(0,1) \rightarrow AM$ и $R_T^N \rightarrow AR_T^N$

$$AM \xrightarrow{T_N} AR_T^N,$$

где T_N – гомоморфизм.

1.2. Восстановление функций по их точечным векторам

Осуществляется с помощью сплайновых приближающих моделей нулевой степени:

$$Sp_{N+1}^0(\bar{f}_{T_{II}}; \tau) = \sum_{v=0}^N f(\theta_v^{(N)}) \pi_N(\tau - \theta_v^{(N)});$$

$$Sp_N^0(\bar{f}_{T_I}; \tau) = \sum_{i=1}^N f(\tau_i^{(N)}) \pi_N(\tau - \tau_i^{(N)}) \quad f(\tau) \in M(0,1),$$

где

$$\pi_N(\tau - \theta_v^{(N)}) = \begin{cases} 1 & \tau \in \left(\theta_v^{(N)} - \frac{1}{2N}, \theta_v^{(N)} + \frac{1}{2N} \right) \\ 0 & \tau \notin \left(\theta_v^{(N)} - \frac{1}{2N}, \theta_v^{(N)} + \frac{1}{2N} \right) \end{cases} \quad (v = \overline{0, N}),$$

$$\pi_N(\tau - \tau_i^{(N)}) = \begin{cases} 1 & \tau \in \left(\tau_i^{(N)} - \frac{1}{2N}, \tau_i^{(N)} + \frac{1}{2N} \right) \\ 0 & \tau \notin \left(\tau_i^{(N)} - \frac{1}{2N}, \tau_i^{(N)} + \frac{1}{2N} \right) \end{cases} \quad (i = \overline{1, N}).$$

Так как

$$\pi_N(\tau - \tau_v^{(N)}) \cdot \pi_N(\tau - \tau_m^{(N)}) = \begin{cases} \pi_N(\tau - \tau_v^{(N)}) & v = m \\ 0 & v \neq m \end{cases} \quad (v, m = \overline{1, N})$$

получим

$$Sp_N^0(f_T; \tau) \cdot Sp_N^0(\varphi_T; \tau) = \sum_{v=1}^N f(\tau_v^{(N)}) \varphi(\tau_v^{(N)}) \pi_N(\tau - \tau_v^{(N)}) = Sp_N^0(f_T \otimes \varphi_T; \tau).$$

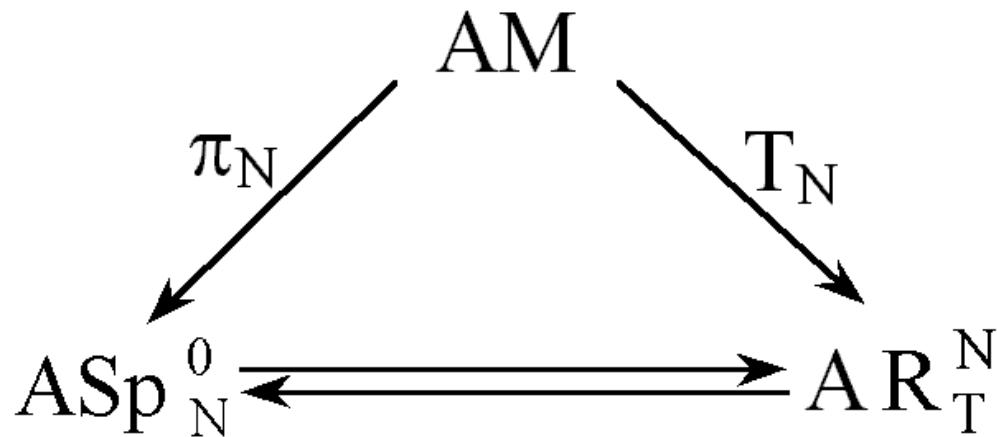
Таким образом

$$AM \xrightarrow{\pi_N} ASp_N^0,$$

а

$$AR_T^N \leftrightarrow ASp_N^0.$$

1.3. Диаграмма основных алгебраических связей метода точечного моделирования



AM – алгебра всех кусочно-непрерывных функций на $[0,1]$;

ASp_N^0 – алгебра приближающих моделей функций из AM на основе сплайнов нулевой степени;

AR_T^N – алгебра точечных векторных изображений;

π_N и T_N – гомоморфизмы соответствующих алгебр.

1.4. Точечное представление линейных и ограниченных операторов

Если A_t – некоторый линейный и ограниченный оператор, а $f(t)$ – некоторая функция из AM , и f_T – точечный изображающий N -вектор функции $f(t)$, то $A_t f(t) \xrightarrow{T_N} A_T^{(N)} \bar{f}_T$, где

$$A_T^{(N)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ \alpha_{v1} & \cdots & \alpha_{vv} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{Nv} & \cdots & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \quad (N \times N).$$

1.4.1. Линейный оператор точечного сдвига

Осуществляет сдвиг по оси « τ » функции $x(\tau)$ на фиксированный шаг, равный расстоянию между узлами N – сетки, т. е. на величину $1/N$.

В пространстве точечных изображений соответствует матричное представление:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} (N \times N).$$

Эта матрица названа канонической матрицей сдвига. Натуральные степени канонической матрицы сдвига образуют линейно независимую систему матриц, поскольку их линейная комбинация, т.е. матричный полином степени $N-1$ с вещественными коэффициентами

$$P_{N-1}(Z) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k Z^k$$

как треугольная матрица $(N \times N)$, может тождественно равняться нулю лишь при равенстве нулю всех элементов, т.е. коэффициентов линейных комбинаций. Такая матрица названа матрицей полиномиального сдвига или (Р – матрицей).

1.4.2. Оператор интегрирования

$$\begin{aligned} T \cdot J_T &= \lambda_0 J(Z) = \lambda_0 \frac{E + Z}{E - Z} = \\ &= \lambda_0 \left[E + 2 \sum_{k=1}^{N-1} Z^k \right] = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{T}{2N}.$$

2. Точечные модели задач Коши для дифференциальных уравнений различного вида

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами n -го порядка

$$\sum_{v=0}^n a_{n-v} \frac{d^v y(t)}{dt^v} = x(t); \quad y^{(v)}(0) = y_0^{(v)} \quad (v = \overline{0, n-1})$$

Введем новую переменную τ (безразмерное время), полагая $t=T\tau$ и оператор дифференцирования по этой переменной получим:

$$\sum_{v=0}^n a_{n-v} \frac{1}{T^v} D_\tau^v \cdot y(\tau) = x(\tau); \quad y^{(v)}(0) = y_0^{(v)} \quad (v = \overline{0, n-1}). \quad (1)$$

Так как

$$\begin{aligned} (TJ_\tau)^n \cdot \left(\frac{D_\tau}{T}\right)^v y(\tau) &= (TJ_\tau)^{n-v} \cdot \left[(TJ_\tau)^v \left(\frac{D_\tau}{T}\right)^v y(\tau) \right] = (TJ_\tau)^{n-v} \left[y(\tau) - \sum_{i=0}^{v-1} (TJ_\tau)^i y_0^{(i)} \right] = \\ &= (TJ_\tau)^{n-v} \cdot y(\tau) - \sum_{i=0}^{v-1} (TJ_\tau)^{n-v+i} \cdot y_0^{(i)} \quad (v = \overline{0, n}), \end{aligned}$$

то задача Коши свелась к решению интегрального уравнения с оператором полиномиального интегрирования степени n .

Эквивалентное интегральное уравнение

$$\sum_{k=0}^n a_k (TJ_\tau)^k \cdot y(\tau) = (TJ_\tau)^n \cdot x(\tau) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k-1} a_k (TJ_\tau)^{k+i} y_0^{(i)}. \quad (2)$$

Точечное преобразование полученного интегрального уравнения приводит к векторно-матричному уравнению для точечных изображений:

$$\sum_{k=0}^n a_k (TJ_T)^k \cdot Y_T = (TJ_T)^n \cdot X_T + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k-1} a_k (TJ_T)^{k+i} y_0^{(i)} \cdot 1_T, \quad (3)$$

где

$$y(\tau) \xrightarrow{T_N} Y_T; \quad x(\tau) \xrightarrow{T_N} X_T; \quad 1(\tau) \xrightarrow{T_N} 1_T = [1, \dots, 1, \dots, 1];$$

$$TJ_\tau \xrightarrow{T_N} TJ_T = \lambda_0 \cdot (E - Z)^{-1} \cdot (E + Z) \quad (N \times N); \quad \lambda_0 = \frac{T}{2N}.$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned}
 H_n(Z) &= \sum_{k=0}^n a_k \lambda_0^k (E - Z)^{n-k} (E + Z)^k, & a) \\
 B_n(Z) &= (E - Z)^n = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} (-1)^q Z^q = \sum_{q=0}^n \beta_q^{(n)} Z^q, & b) \\
 \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k-1} a_k (TJ_T)^{k+i} y_0^{(i)} \cdot 1_T &= (E - Z)^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \overline{H}_n(i) y_0^{(i)}. & c)
 \end{aligned} \right\}$$

В результате получим:

$$H_n(Z) \cdot Y_T = \lambda_0^n \cdot B_n(-Z) \cdot X_T + (E - Z)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{H}_n(i) \cdot y_0^{(i)}. \quad (4)$$

Его решение относительно N -вектора Y_T -точечного изображающего вектора функции $y(\tau)$, как решение задачи Коши, сводится к обращению системной матрицы $H_n(Z)$ ($N \times N$). Таким образом

$$Y_T = \lambda_0^n \cdot H_n(Z)^{-1} \cdot B_n(-Z) \cdot X_T + H_n(Z)^{-1} \cdot (E - Z)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{H}_n(i) \cdot y_0^{(i)}.$$

Где элементы обратной матрицы

$$H_n(Z)^{-1} = G_n(Z) = \sum_{q=0}^{N-1} g_q^{(n)} Z^q$$

последовательно находятся из рекуррентных равенств:

$$\sum_{j=0}^q h_{q-j}^{(n)} g_j^{(n)} = \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 0 & q = 1, N-1 \end{cases}; \quad h_q^{(n)} \equiv 0; \quad q > n.$$

Иллюстративный пример

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 1001 \frac{dx(t)}{dt} + 1000x(t) = 0; \quad x(0) = 1; \quad x'(0) = 2996$$

$$x_{\text{точ.}}(t) = 4 \cdot e^{-t} - 3 \cdot e^{-1000t}$$

В табл. приведены результаты расчета задачи при $\lambda_0=0,005$ и $N=50$, что соответствует шагу 0,01 в решении по методу Эйлера который при таком шаге оказался неустойчивым, что не позволяет найти решение.

v	5	7	9	11	13	17	21	25
t_v	0,045	0,065	0,085	0,105	0,125	0,165	0,205	0,245
$x(t_v)$	3,725	3,704	3,655	3,593	3,526	3,391	3,258	3,131
$x_{\text{точ.}}(t_v)$	3,824	3,748	3,674	3,601	3,53	3,392	3,259	3,131

Из 50 отсчетов $\{x(t_v)\}$ ($N=50; T=0,5$) показаны в табл. лишь некоторые, соответствующие узлам $t_v = \lambda_0(2v-1) = 0,005(2v-1)$ при $v=5, 7, 9, 11, 13, 17, 21$ и 25. Последующие отсчеты совпадают с точными их значениями до четвертого знака.

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения 2^{го} порядка с переменными коэффициентами

На отрезке $[0, T]$ рассмотрим задачу Коши уравнения:

$$\alpha_0(t) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_2(t) y(t) = x(t); \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0$$

Относительно переменных коэффициентов будем предполагать, что это – непрерывные функции на отрезке $[0, T]$, причем $\alpha_1(t)$ – дифференцируема на этом отрезке, а функция $\alpha_0(t)$ дифференцируема в нем, по крайней мере, дважды. Тогда:

$$\frac{d^2}{dt^2} [\alpha_0(t)y(t)] + \frac{d}{dt} [\alpha_1(t)y(t)] + \alpha_2(t)y(t) = x(t); \quad \begin{aligned} y(0) &= y_0; \\ y'(0) &= y'_0; \end{aligned} \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где

$$a_0(t) = \alpha_0(t); \quad a_1(t) = \alpha_1(t) - 2\alpha'_0(t); \quad a_2(t) = \alpha_2(t) - \alpha'_1(t) + \alpha''_0(t).$$

Теорема. Если коэффициентные функции уравнения (1) кусочно–непрерывны на отрезке $[0, T]$ и существует натуральное число N_0 такое, что для всех $N > N_0$ окажется

$$\left. \begin{aligned} & a_0(t) + \frac{T}{2N} a_1(t) + \left(\frac{T}{2N} \right)^2 a_2(t) > 0 \\ & \text{при } a_0(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad t \in [0, T],$$

то на этом отрезке существует единственное решение задачи Коши для указанного уравнения, которое может быть найдено методом точечных представлений в форме точечного изображающего N –вектора для всех $N > N_0$.

Проинтегрировав дважды в пределах от 0 до t ($t=T\tau$) обе стороны уравнения с учетом начальных условий получим:

$$a_0(\tau)y(\tau) + TJ_\tau \left[a_1(\tau)y(\tau) \right] + (TJ_\tau)^2 \left[a_2(\tau)y(\tau) \right] = (TJ_\tau)^2 x(\tau) + a_0(0)y_0 + \\ + \left[(a'_0(0) + a_1(0))y_0 + a_0(0)y'_0 \right] TJ_\tau; \quad \tau \in [0,1].$$

Переходя к точечным представлениям будем иметь:

$$H_2(Z; \Theta) \cdot Y_T = \\ = \lambda_0^3 (E + Z)^2 \cdot X_T + \lambda_0 \cdot A(a; y_0, y_0^{(1)}) \cdot (e1 + e2) + a_0(0)y_0 \cdot (e1 - e2), \quad (2)$$

где

$$A(a; y_0; y_0^{(1)}) = (a_0^1(0) + a_1(0))y_0 + a_0(0)y_0^{(1)};$$

$$(E - Z^2)1_T = (e1 + e2) = Colon[1, 1, 0, \dots, 0]; \quad a)$$

$$(E - Z^2)^2 \cdot 1_T = (e1 - e2) = Colon[1, -1, 0, \dots, 0]; \quad b)$$

и системная нижнетреугольная матрица

$$H_2(Z, \Theta) = (E - Z)^2 a_0(\Theta) + \lambda \left(E - Z^2 \right) a_1(\Theta) + \lambda_0^2 (E + Z)^2 a_2(\Theta),$$

определитель которой

$$\text{Det } H_2(Z; \Theta) = \prod_{v=1}^N \left[a_0\left(\tau_v^{(N)}\right) + \lambda_0 a_1\left(\tau_v^{(N)}\right) + \lambda_0^2 a_2\left(\tau_v^{(N)}\right) \right] \neq 0$$

согласно теореме.

Таким образом

$$\begin{aligned} Y_T &= \lambda_0^3 \cdot H_2(Z; \Theta)^{-1} \cdot (E + Z)^2 \cdot X_T + \\ &+ \lambda_0 \cdot A(a; y_0, y_0^{(1)}) \cdot H_2(Z; \Theta)^{-1} \cdot (e1 + e2) + \\ &+ a_0(0) y_0 \cdot H_2(Z; \Theta)^{-1} \cdot (e1 - e2). \end{aligned}$$

Иллюстративный пример

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4t \frac{dy(t)}{dt} + (4t^2 + 2)y(t) = 0; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0.$$

Оно имеет два линейно-независимые (фундаментальные) решения:

$$y_1(t) = e^{-t^2} \quad \text{и} \quad y_2(t) = te^{-t^2},$$

тогда

$$y(t) = (y_0 + y'_0 \cdot t)e^{-t^2} = y_0 \cdot e^{-t^2} + y'_0 \cdot te^{-t^2} = y_0 \cdot y_1(t) + y'_0 \cdot y_2(t).$$

Преобразуем заданное уравнение. Для новых коэффициентных функций будем иметь:

$$a_0(t) = 1; \quad a_1(t) = 4t; \quad a_2(t) = (4t^2 + 2) - 4 = 4t^2 - 2; \quad t \geq 0.$$

Задача получает вид

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{d}{dt} [4t \cdot y(t)] + (4t^2 - 2) \cdot y(t) = 0; \quad t \in [0, T]; \quad y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0.$$

Условие теоремы

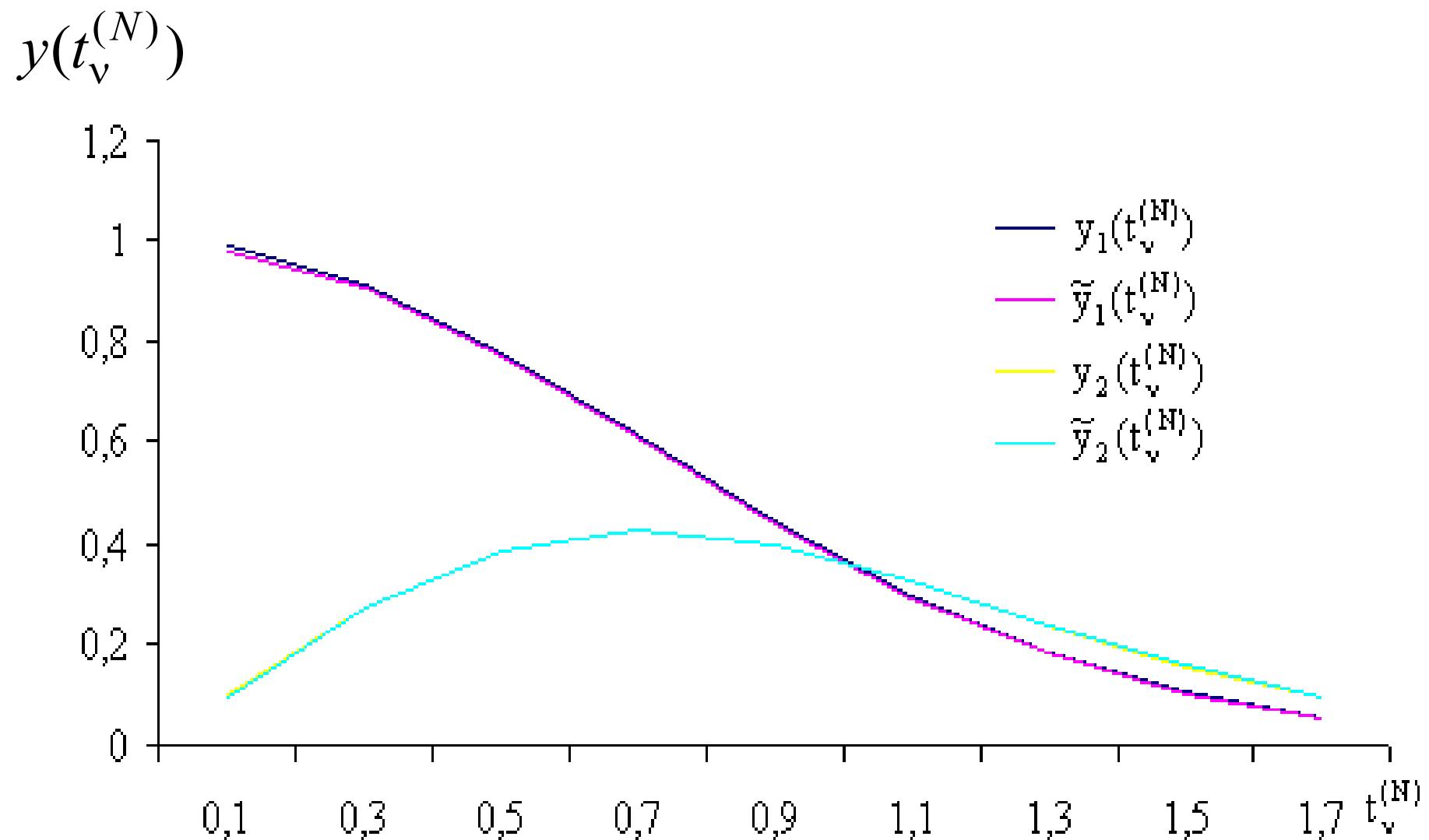
$$A_0(t) = a_0(t) + \lambda_0 a_1(t) + \lambda_0^2 a_2(t) = \left(1 - \frac{2}{N^2}\right) + \frac{4}{N}t + \frac{4}{N^2}t^2 > 0,$$

будет выполняться очевидным образом для всех $N > 2$ и любого заданного отрезка $[0, T]$.

Примем $T=2$ и $N=10$. Тогда

$$\lambda_0 = \frac{T}{2N} = \frac{1}{N} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$t_v^{(N)}$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
$y_1(t_v^{(N)})$	0,9900	0,9139	0,7788	0,6126	0,4449	0,2982	0,1845	0,1054	0,0556	0,0270
$\tilde{y}_1(t_v^{(N)})$	0,9800	0,9046	0,7708	0,6063	0,4402	0,2950	0,1825	0,1042	0,0549	0,0267
$y_2(t_v^{(N)})$	0,0990	0,2740	0,3894	0,4286	0,4004	0,3280	0,2398	0,1581	0,0945	0,0513
$\tilde{y}_2(t_v^{(N)})$	0,0980	0,2717	0,3877	0,4270	0,4	0,3287	0,2410	0,1591	0,0950	0,0515



Начальная задача для линейного дифференциально-разностного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{v=0}^{n-1} a_{n-v} \frac{d^v y(t)}{dt^v} + \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} \frac{d^v y(t-t_3)}{dt^v} = x(t); \quad t \geq 0$$

Такую задачу можно преобразовать в задачу Коши

$$\sum_{v=0}^n a_{n-v} y^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} y^{(v)}(t-t_3) = x(t) - E(t_3; t-t_3) \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} \varphi^{(v)}(t-t_3)$$

с чистым запаздыванием

$$y^{(v)}(t-t_3) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < t_3) \\ y^{(v)}(t-t_3) & t > t_3 \end{cases} \quad (v = 1, (n-1))$$

и финитной добавочной функцией

$$E(t_3; t-t_3) \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} \varphi^{(v)}(t-t_3) = \begin{cases} \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} \varphi^{(v)}(t-t_3) & t \in (0, t_3) \\ 0 & t \notin [0, t_3] \end{cases}$$

в правой части уравнения, определяемой начальной функцией

$$\varphi(t) = y_0 + y'_0 t + y''_0 \frac{t^2}{2!} + \cdots + y_0^{(n-1)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \cdot \frac{t^k}{k!},$$

заданной на $[-t_3, 0]$ ее производными и параметрами членов с запаздыванием.

Если начальные условия нулевые, то получаем следующую задачу Коши:

$$\sum_{v=0}^n a_{n-v} \left(\frac{D_\tau}{T} \right)^{(v)} y(\tau) + \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} \left(\frac{D_\tau}{T} \right)^{(v)} \cdot y^{(v)}(\tau - \tau_3) = x(\tau); \quad (v = \overline{0, n-1})$$

или в форме интегрального уравнения:

$$\sum_{k=0}^n a_k (TJ_\tau)^k y(\tau) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k (TJ_\tau)^k \cdot y(\tau - \tau_3) = (TJ_\tau)^n x(\tau) \quad \tau \in [0, 1].$$

Поскольку

$$\boxed{y(\tau - \tau_3) \xrightarrow{T_N} Z^m Y_T \quad (m = \tau_3 N); \quad y(\tau) \xrightarrow{T_N} Y_T; \quad x(\tau) \xrightarrow{T_N} X_T,}$$

$$TJ_\tau \xrightarrow{T_N} TJ_T = \lambda_0 \cdot J(Z) = \lambda_0 \cdot (E - Z)^{-1}(E + Z) \quad (N \times N),$$

то в точечных представлениях получим

$$\sum_{k=0}^n a_k (TJ_T)^k Y_T + \sum_{k=0}^{n-1} b_k (TJ_T)^k \cdot Z^m Y_T = (TJ_T)^n X_T \quad (1)$$

или

$$H_n(m; Z) \cdot Y_T = \lambda_0^n \cdot (E + Z)^n \cdot X_T, \quad (2)$$

где

$$H_n(m; Z) = H_n(Z) + S_n(Z) \cdot Z^m = \sum_{q=0}^{N-1} h_q^{(n)}(m) \cdot Z^q;$$

$$H_n(Z) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda_0^k \cdot (E - Z)^{n-k} (E + Z)^k = \sum_{q=0}^n h_q^{(n)} \cdot Z^q;$$

$$S_n(Z) = \sum_{k=1}^n b_k \lambda_0^k \cdot (E - Z)^{n-k} (E + Z)^k = \sum_{q=0}^n S_q^{(n)} Z^q.$$

Таким образом решение задачи при нулевых начальных условиях получит вид:

$$Y_{T^I} = H_n(m; Z)^{-1} \cdot X_T \cdot \lambda_0^n (E + Z)^n = \frac{\lambda_0^n (E + Z)^n}{H_n(Z) + S_n(Z) \cdot Z^m} \cdot X_T. \quad (3)$$

Решение же $y(t)$ $t \in [0, T]$ задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n – го порядка с запаздыванием в общем случае представляется в виде суммы двух составляющих

$$y(t) = y_I(t) + y_{II}(t) \xrightarrow{T_N} Y_T = Y_{T^I} + Y_{T^{II}}.$$

Первая составляющая $y_I(t)$ есть решение задачи при нулевых начальных условиях. Найдем вторую составляющую. Это – точечный N – вектор решения $y_{II}(t)$ задачи Коши на $[0, T]$ для дифференциального уравнения, определяемого только начальными условиями, когда $x(t) \equiv 0$:

$$\sum_{v=0}^n a_{n-v} y_{II}^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} y_{II}^{(v)}(t - t_3) = - \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} \phi^{(v)}(t - t_3) \quad t \in [0, t_3] \quad t \in [0, T].$$

Тогда в точечных представлениях получим:

$$H_n(m; Z) \cdot Y_{T^{II}} = \lambda_0^n \cdot (E + Z)^n f_T(\varphi) + (E - Z)^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \bar{H}_n(i) y_0^{(i)},$$

где $f_T(\varphi)$ - точечный изображающий N -вектор финитной функции:

$$f(\varphi; t) = - \sum_{v=0}^{n-1} b_{n-v} \varphi^{(v)}(t - t_3); \quad t \in [0, t_3].$$

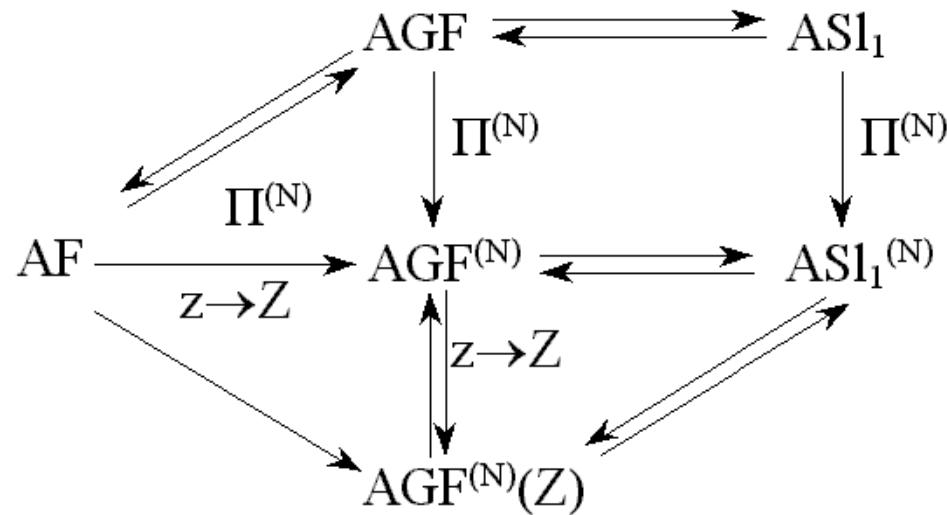
Таким образом получим:

$$Y_{T^{II}} = H_n(m; Z)^{-1} \cdot \lambda_0^n (E + Z)^n \cdot f_T(\varphi) + H_n(m; Z)^{-1} (E - Z)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{H}_n(i) y_0^{(i)}$$

и

$$\begin{aligned} Y_T &= Y_{T^I} + Y_{T^{II}} = \\ &= H_n(m; Z)^{-1} \cdot \lambda_0^n (E + Z)^n \cdot [X_T + f_T(\varphi)] + \\ &+ H_n(m; Z)^{-1} (E - Z)^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{H}_n(i) y_0^{(i)}. \end{aligned}$$

Гомоморфные связи алгебраических структур точечных представлений



AF – банахова алгебра всевозможных функций комплексного переменного, определенных и непрерывных в единичном круге и аналитических внутри этого круга; AGF – банахова алгебра степенных рядов функций из AF ; ASl_1 – сверточная алгебра бесконечномерных векторов составленных из коэффициентов соответствующих степенных рядов и имеющих l_1 -нормы; $AGF^{(N)}$ – N -алгебра частичных сумм N -го порядка степенных рядов; $ASl_1^{(N)}$ – сверточная N -алгебра N -мерных векторов составленных из коэффициентов соответствующих частичных сумм N -го порядка степенных рядов и имеющих l_1 -нормы; $AGF^{(N)}(Z)$ – N -алгебра матриц полиномиального сдвига.

Теорема о точечном изображении свертки двух функций

Рассматривая свертку двух функций $g(t)$ и $x(t)$ из $M(0, T)$ как обобщенный интегральный оператор доказана теорема о точечном изображении свертки этих функций, согласно которой

$$\int_0^t g(t-\eta)x(\eta)d\eta = T \int_0^t g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi \xrightarrow{T_N} G^*(TJ_T)X_T = W_g^*(Z)X_T,$$

где

X_T – точечное векторное изображение функции $x(t)=x(T\tau)=x(\tau)$;

TJ_T – точечная матрица интегрирования;

$G^*(TJ_T)$ ($N \times N$) матрица, возникающая из инверсного изображения по

Лапласу $G^*(\lambda) = G^*\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ функции – оригинала $g(t)$ путем формальной замены комплексной переменной λ на матрицу TJ_T ($N \times N$).

Точечное обращение преобразований Лапласа

Теорема о точечном изображении свертки позволяет осуществлять приближенное обращение преобразования Лапласа произвольной функции в форме ее точечного изображающего N -вектора:

$$g(t) = \int_0^t \delta(t-\eta)g(\eta)d\eta \xrightarrow{T_N} g_T = W_g^*(Z)\delta_T = \bar{W}_g * \delta_T,$$

где

$$\delta_T = \frac{1}{\lambda_0} (E + Z)^{-1} \cdot e_1 = \frac{1}{\lambda_0} \cdot \text{Colon} \left[1, -1, \dots (-1)^{k-1}, \dots (-1)^{N-1} \right]$$

- точечный изображающий вектор δ -функции Дирака,

$$\bar{W}_g = \text{Colon} \left[W_0, W_1, \dots W_k, \dots W_{N-1} \right] = W_g^*(Z)e_1$$

- элементный N -вектор матрицы $W_g^*(Z)$.

Точечное обращение преобразований Фурье

Введено понятие спектрального изображающего вектора:

$$P_{\omega}^{(N)} = \text{Colon} \left[P\left(\frac{\pi}{2T}\right), \dots, P\left(\frac{(2k-1)\pi}{2T}\right), \dots, P\left(\frac{(2N-1)\pi}{2T}\right) \right],$$

компоненты которого есть отсчеты вещественной частотной характеристики в узлах чебышевской частотной сетки:

$$\omega_k = \frac{(2k-1)\pi}{2T} = \frac{(2k-1)\omega_{cp}}{2N} \quad (k = \overline{1, N}),$$

что позволило решить задачу точечного обращения косинус-преобразования Фурье для конечного временного промежутка

$$g_T = \frac{2}{T} \tilde{C}_N(T) \cdot P_{\omega}^{(N)},$$

где

$$\tilde{C}_N(T) = \left[\cos(2k-1) \frac{\pi}{2} \tau_v^{(N)} \right]_{v,k} \quad (v, k = \overline{1, N}).$$

Задачи Коши для n -мерных линейных дифференциальных уравнений

Пусть дана для решения на отрезке $[0, T]$ задача Коши

$$\frac{dX(t)}{dt} + A(t)X(t) = U(t); \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

$A(t) = [a_{ij}(t)]$ – матричная функция $(n \times n)$ с непрерывными на $[0, T]$ элементами.

Будем предполагать также покоординатную непрерывность и вектор-функции $U(t)$.

Интегрируя (1) и вводя переменную τ получим эквивалентное интегральное уравнение:

$$X(\tau) + T \int_0^\tau A(\tau)X(\tau) = F(\tau) + X_0; \quad \tau \in [0, 1], \quad (2)$$

где $F(\tau) = T \int_0^\tau U(\tau) d\tau; \quad \tau \in [0, 1].$

При переходе в уравнении (2) к точечным представлениям, получаем

$$\overline{X}_T + \left[J_N(Z) \otimes E_n \right] D_N \left[A(\tau_v^N) \right] \cdot \overline{X}_T = \overline{F}_T + \overline{X}_{0_T}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} X(\tau) &\xrightarrow{T} \overline{X}_T = \text{Colon} \left[X_{1T} \vdots \cdots \vdots X_{vT} \vdots \cdots \vdots X_{NT} \right], \\ F(\tau) &\xrightarrow{T} \overline{F}_T = \text{Colon} \left[F_{1T} \vdots \cdots \vdots F_{vT} \vdots \cdots \vdots F_{NT} \right] = \left[J_N(Z) \otimes E_n \right] \cdot \overline{U}_T, \\ X(0) &\xrightarrow{T} \text{Colon} \left[X_0 \vdots \cdots \vdots X_0 \vdots \cdots \vdots X_0 \right] = \left(\overline{1}_T^{(N)} \otimes E_n \right) X_0 = \overline{X}_{0_T}, \end{aligned}$$

$\left[J_N(Z) \otimes E_n \right]$ – блочная матрица, реализующая операцию интегрирования в векторном пространстве точечно-векторных отображений вектор-функций из $M_n(0,1)$,

$$D_N \left[A(\tau_v^N) \right] = \text{Diag} \left[A(\tau_1^{(N)}), \dots, A(\tau_v^N), \dots, A(\tau_N^N) \right]$$

- есть точечное представление функциональной матрицы в узлах N -сетки I рода.

3. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость линейных динамических систем как свойства их точечных моделей

Управляемость

Пусть имеем линейную нестационарную динамическую систему:

$$\frac{dX(\tau)}{d\tau} + TA(\tau)X(\tau) = TK(\tau) \cdot U(\tau), \quad (1)$$

n фазовых переменных которой (n -вектор состояния)

$$X(\tau) = Colon[x_1(\tau), \dots, x_i(\tau), \dots, x_n(\tau)]$$

оказываются ее выходными переменными, а q -вектор

$$U(\tau) = Colon[u_1(\tau), \dots, u_i(\tau), \dots, u_q(\tau)]$$

является вектором ее входных сигналов.

Определение 1. Линейную систему (1) назовем управляемой на отрезке $[0, \tau_0] \subset [0, 1]$, если для всякого конечного состояния $X(\tau_0)$ на этом отрезке существует управление $U_0(\tau)$, которое переводит систему из состояния покоя $X(0) = 0$ в состояние $X(\tau_0)$.

Задача. Найти условия управляемости систем (1) на основе их точечных моделей, точнее, точечных моделей их эквивалентных интегральных уравнений вида ($X_0 = 0$):

$$X(\tau) + T \int_0^\tau A(\tau)X(\tau)d\tau = T \int_0^\tau K(\tau)U(\tau)d\tau, \quad (2)$$

которые являются гомоморфными алгебраическими образами этих уравнений.

Однако переход к точечным моделям требует несколько иного определения свойства управляемости.

Для линейной динамической системы (2), точечная модель которой, ассоциированная с чебышевской N -сеткой I рода, связывает блочные точечные вектора входа и выхода

$$\left. \begin{array}{l} U(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{U}_{T_1} = \text{Colon} \left[U(\tau_1^{(N)}) \vdots \cdots \vdots U(\tau_v^{(N)}) \vdots \cdots \vdots U(\tau_N^{(N)}) \right] \quad a) \\ X(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{X}_{T_1} = \text{Colon} \left[X(\tau_1^{(N)}) \vdots \cdots \vdots X(\tau_v^{(N)}) \vdots \cdots \vdots X(\tau_N^{(N)}) \right] \quad b) \end{array} \right\} \quad (3)$$

в форме линейного преобразования

$$\bar{X}_{T_1} = W_N(A_v; K_v) \cdot \bar{U}_{T_1}, \quad (4)$$

реализуемого блочной передаточной матрицей:

$$W_N(A_v; K_v) = T_N^{-1} [B_v] \cdot D_N \left[(E_n + \lambda_0 A_v)^{-1} \right] \cdot \lambda_0 \left[(E_n + Z) \otimes E_n \right] \cdot D_N [K_v], \quad (5)$$

может быть дано следующее определение свойства управляемости.

Определение 2. Линейную динамическую систему (2), имеющую точечную модель (4), назовем управляемой на отрезке $[0, 1]$ безразмерного времени (или на отрезке $[0, T]$ для переменной $t = \tau$), если для всяких состояний $X(\tau_v^{(N)})$ ($v = 1, N$), как значений выходного n -мерного сигнала $X(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ в узлах чебышевской N -сетки I рода

$$\tau_v^{(N)} = \frac{2v-1}{2N}, (v = \overline{1, N}),$$

т. е. для всякого выходного точечного вектора \bar{X}_{T_1} (3 б) существуют такие соответствующие q -мерные управлении

$$U(\tau_v^{(N)}), (v = \overline{1, N}),$$

образующие точечные вектора входа \bar{U}_{T_1} (3 а), которые переводят динамическую систему из состояния покоя $X(0) = X_0 = 0$ в любое из заданных состояний $X(\tau_v^{(N)})$ ($v = \overline{1, N}$) при любой размерности чебышевской сетки.

Теорема. Если матрица $A(\tau)$, $(n \times n)$, $\tau \in [0, 1]$ нестационарной динамической системы (2) будет положительно определенной, а матрица $K_v(\tau)$, $(n \times q)$, $(q \geq n)$, $\tau \in [0, 1]$ будет иметь ранг n , то передаточная матрица $W_N(A_v; K_v)$ ($Nn \times Nq$) (5) такой системы при любом N будет ранга Nn , совпадающего с размерностью блочного вектора \bar{X}_{T_1} и система окажется управляемой на отрезке $[0, T]$ (по времени $t = T\tau$).

Замечание 1. Отметим следующую особенность матричных произведений в точечных моделях линейных динамических систем. Так, рассмотрим произведение матриц в представлении передаточной матрицы (ПМ) точечной модели (4) линейной нестационарной динамической системы:

$$\lambda_0 T_N^{-1} [B_v] \cdot D_N [(\lambda_0 A_v + E_n)^{-1}] \cdot [(E_n + Z) \otimes E_n] D_N [K_v] = W_N(A_v; K_v).$$

Если отдельные блочные матрицы – сомножители рассматривать в роли ПМ точечных моделей отдельных динамических звеньев, то при схемном (графическом) представлении всей точечной модели системы будем иметь последовательную цепочку этих динамических звеньев, причем порядок их следования окажется обратным порядку следования их ПМ в произведении (5).

Введем динамические звенья с передаточными матрицами – сомножителями из произведения в (5):

$$\left. \begin{aligned}
 D_N [K_v] \cdot \bar{U}_{\Pi} &= W_1 \cdot \bar{U}_{T_1} = \bar{X}_1; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar{U}_{\Pi}} \boxed{W_1} \xrightarrow{\bar{X}_1} & a) \\
 [(E_n + Z) \otimes E_n] \bar{X}_1 &= W_2 \cdot \bar{X}_1 = \bar{X}_2; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar{X}_1} \boxed{W_2} \xrightarrow{\bar{X}_2} & b) \\
 D_N [(E_n + \lambda_0 A_v)^{-1}] \bar{X}_2 &= W_3 \cdot \bar{X}_2 = \bar{X}_3; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar{X}_2} \boxed{W_3} \xrightarrow{\bar{X}_3} & c) \\
 \lambda_0 T_N^{-1} [B_v] \bar{X}_3 &= W_4 \cdot \bar{X}_3 = \bar{X}_{T_1}; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar{X}_3} \boxed{W_4} \xrightarrow{\bar{X}_{T_1}} & d)
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда точечная модель (4) может быть записана в виде

$$W_N(A_v; K_v) \cdot \bar{U}_{T_1} = W_4 \cdot W_3 \cdot W_2 \cdot W_1 \cdot \bar{U}_{T_1} = \bar{X}_{T_1}, \quad (7)$$

т. е. ее ПМ получит представление

$$W_N(A_v; K_v) = W_4 \cdot W_3 \cdot W_2 \cdot W_1. \quad (8)$$

Замечание 2. Если число выходных переменных линейной динамической системы не равно числу ее переменных состояния. В этом случае система описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX(\tau)}{d\tau} + T \cdot A(\tau) X(\tau) &= T \cdot K(\tau) \cdot U(\tau); & a) \\ Y(\tau) &= C(\tau) \cdot X(\tau). & b) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Пусть, q - размерность векторного сигнала входа $U(\tau)$ (вектора управления), а n – размерность вектора состояний $X(\tau)$ (число фазовых переменных), который линейным преобразованием, осуществляемым матрицей $C(\tau)$ ($r \times n$) определяет r -вектор выхода $Y(\tau)$, причем $r \leq n$. Соответствующая точечная модель такой динамической системы представляется равенствами

$$\left. \begin{aligned} W_N(A_\nu; K_\nu) \bar{U}_{T_I} &= \bar{X}_{T_I}; & a) \\ D_N(C_\nu) \bar{X}_{T_I} &= \bar{Y}_{T_I}, & b) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$D_N(C_v) = D_N \left[C(\tau_v^{(N)}) \right] = Diag \left[C_1 \ddots C_v \ddots C_N \right] (Nr \times Nn)$$

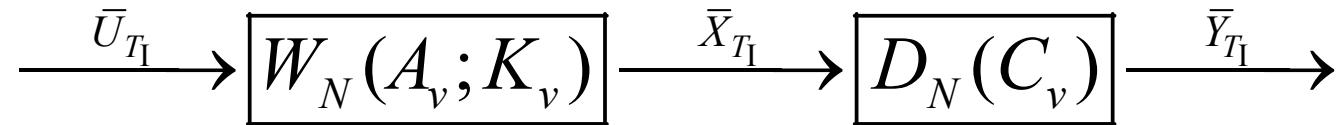
квазидиагональная матрица $C_v (r \times n)$ ($v = \overline{1, N}$), с блоками-элементами связывает точечный вектор состояний \bar{X}_{T_I} с Nr -вектором выхода \bar{Y}_{T_I} .

Умножим обе стороны равенства (10 *a*) на матрицу $D_N(C_v)$ (31 *b*) и учитывая (10 *b*), получим точечную модель связи «вход-выход» для динамической системы(9):

$$D_N(C_v) \cdot W_N(A_v; K_v) \cdot \bar{U}_{T_I} = \bar{Y}_{T_I}$$

с ПМ

$$D_N(C_v) \cdot W_N(A_v; K_v) (Nr \times Nq).$$



Наблюдаемость

Введем в рассмотрение n -мерную линейную нестационарную динамическую систему:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dX(t)}{dt} + A(t)X(t) = K(t)U(t); \quad a) \\ Y(t) = C(t) \cdot X(t), \quad b) \end{array} \right\} (t \geq 0) \quad (1)$$

имеющую q входов $U(t) = \text{Colon}[U_1(t), \dots, U_i(t), \dots, U_q(t)]$

r выходов $Y(t) = \text{Colon}[y_1(t), \dots, y_i(t), \dots, y_r(t)]$

и n фазовых переменных (переменных состояния)

$$X(t) = \text{Colon}[x_1(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)].$$

Системные матрицы определены для всех $t \geq 0$ и имеют соответствующие размерности:

$$A(t) (n \times n); \quad K(t) (n \times q); \quad C(t) (r \times n).$$

Поставим задачу о построении асимптотического наблюдателя, т.е. такового линейного динамического устройства, которое было бы способно по наблюдаемым сигналам выхода динамической системы (1) формировать на своем выходе такую оценку

$$\hat{X}(t) = \text{Colon}[\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_i(t), \dots, \hat{x}_n(t)] \quad (2)$$

n -вектора состояния $X(t)$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [X(t) - \hat{X}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \Rightarrow \left\| X(t) - \hat{X}(t) \right\|_{\varepsilon} = \left\| \varepsilon(t) \right\|_{\varepsilon} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad (3)$$

т. е. функция рассогласования (ошибки)

$$\varepsilon(t) = [X(t) - \hat{X}(t)] = \text{Colon}[\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_i(t), \dots, \varepsilon_n(t)] \quad (4)$$

асимптотически стремится к нулю при любом конечном значении

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \neq 0.$$

Такое динамическое устройство получим из динамической системы (1), если к ее входному сигналу $K(t) \cdot U(t)$ добавить в качестве корректирующего сигнала

$$S(t) = \begin{bmatrix} Y(t) - C(t)\hat{X}(t) \end{bmatrix} = S(t) \cdot C(t) \begin{bmatrix} X(t) - \hat{X}(t) \end{bmatrix} = S(t)C(t)\varepsilon(t),$$

где $S(t)$ есть некоторая матрица размерности $(n \times r)$ и ранга n , подлежащая определению (идентификации).

Таким образом получим однородное уравнение наблюдателя

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + P(t)\varepsilon(t) = 0 \quad (5)$$

с матрицей

$$P(t) = \begin{bmatrix} A(t) + S(t)C(t) \end{bmatrix} \quad (n \times n); \quad t \geq 0, \quad (6)$$

которое и определит процесс рассогласования $\varepsilon(t)$ (4) при $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \neq 0$.

Теорема 1. Если матрицу $S(t)$ ($n \times r$); $t \geq 0$ можно определить так, что матрица наблюдателя

$$P(t) = [A(t) + S(t)C(t)] (n \times n); t \geq 0$$

при положительно определенной матрице $A(t)$ ($n \times n$) и заданной матрице $C(t)$ ($r \times n$) окажется положительно определенной при всех $t \geq 0$, то линейная нестационарная динамическая система (1) окажется асимптотически наблюдаемой, т. е. решение уравнения наблюдателя (5) при любых конечных значениях $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \neq 0$ будет асимптотически устойчивым

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t)\|_{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \varepsilon(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Рассмотрим теперь уравнение наблюдателя , определяющее процесс рассогласования $\varepsilon(t)$ (4) на конечном временном отрезке $[0, T]$ ($T > 0$). При этом введем симметричную матричную функцию $Q(t)$:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(T\tau) = \frac{1}{2} \left[P(T\tau) + P^+(T\tau) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [A(T\tau) + A(T\tau)] + [S(T\tau)C(T\tau) + C^+(T\tau)S^+(T\tau)] \right\} (n \times n). \quad (7) \end{aligned}$$

Тогда получим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Q(t)\varepsilon(t) = 0; t \in [T\tau] \Rightarrow \frac{d\varepsilon(T\tau)}{d\tau} + TQ(T\tau)\varepsilon(T\tau) = 0, \quad (8)$$

определяющее процесс рассогласования $\varepsilon(t) = \varepsilon(T\tau)$ на отрезке $\tau \in [0, 1]$.

Теорема 2. Если системная матрица $A(T\tau)$ ($n \times n$) нестационарной динамической системы, число выходов которой r не меньше n -числа фазовых переменных ($r \geq n$), при всех $\tau \in [0,1]$ и $T > 0$ окажется положительно определенной (ПО), а матрица $C(T\tau)$ ($r \times n$), при этом, будет иметь ранг n , то существует множество матриц $\{S(T\tau)\}$ $\tau \in [0,1]$ размерности $(n \times r)$ и ранга n , способных формировать симметричные и ПО системные матрицы $Q(T\tau)$ (7) асимптотического наблюдателя (8), представляя их в форме диагональных матриц с заданными положительными элементами.

В частности, возможно представление в виде скалярной матрицы

$$\frac{1}{\lambda_0} E_n,$$

где

$$\lambda_0 = \frac{T}{2N}.$$

Итак, и для нестационарных динамических систем может быть построен наблюдатель с постоянной системной матрицей

$$\frac{1}{\lambda_0} E_n = Q(T\tau) \quad \tau \in [0,1].$$

Явное решение его уравнение при этом получит вид:

$$\varepsilon(T\tau) = e^{-\frac{T}{\lambda_0}\tau_0} \cdot \varepsilon_0; \quad \tau \in [0,1] \quad (T > 0),$$

определяя, теперь, процесс рассогласования между n -вектор-функцией $X(T\tau)$ фазовых переменных нестационарной динамической системы и ее оценкой $\hat{X}(T\tau)$ даваемой наблюдателем.

При этом можно получить следующие оценки фазовых переменных динамических систем

$$\hat{X}(T\tau) = (C^+(T\tau) \cdot C(T\tau))^{-1} \cdot C^+(T\tau) [Y(T\tau) - Y(T) e^{\frac{T}{\lambda_0}(1-\tau)}]; \quad \tau \in [0,1];$$

$$\hat{X}(T\tau) = X(T\tau) - X(T) e^{\frac{T}{\lambda_0}(1-\tau)}; \quad \tau \in [0,1].$$

Где вектор-функции $X(T\tau)$ и $Y(T\tau) = C(T\tau) \cdot X(T\tau)$ могут быть определены по их точечным изображениям, полученным как точечные решения уравнений (1), ассоциированные с чебышевской $2N$ -сеткой II рода. Будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X(T\tau) &\xrightarrow{T_{\text{II}}^{(2N)}} \bar{X}_{T_{\text{II}}} = T_{2N}^{-1}[\alpha_k] \cdot D_{2N}[(2E_n + \lambda_0 A_k)^{-1}] \lambda_0 \times \\ &\times \left\{ [(E_{2N} + Z_{2N}) \otimes E_n] D_{2N}[K_k] \bar{U}_{T_{\text{I}}} \right\} + \bar{e}_1^{(2N)}(K_0) \cdot U_0 \quad a) \\ Y(T\tau) &\xrightarrow{T_{\text{II}}^{(2N)}} \bar{Y}_{T_{\text{II}}} = D_{2N}[C_k] \cdot \bar{X}_{T_{\text{II}}} . \quad b) \end{aligned} \right\}$$

$X(T) = X(\lambda_0 2N)$ есть последняя блочная координата точечного вектора $X(T\tau) \xrightarrow{T_{\text{II}}^{(2N)}} \bar{X}_{T_{\text{II}}} = \text{Colon}[X(\lambda_0) \dots X(\lambda_0 k) \dots X(\lambda_0 2N)]$

$$X(T) = X(\lambda_0 2N) = \left\langle \bar{X}_{T_{\text{II}}}, \bar{e}_{2N}^{(2N)}(E_n) \right\rangle,$$

а

$$Y(T) = C(T) \cdot X(T).$$

Устойчивость

Динамические системы управления вида

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dX(t)}{dt} + A(t) \cdot X(t) = K(t) \cdot U(t); \quad a) \\ Y(t) = C(t) \cdot X(t) \quad b) \end{array} \right\} t \geq 0, \quad (1)$$

рассмотренная на конечном временном отрезке $[0, T]$,
получает представление:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dX(T\tau)}{d\tau} + TA(T\tau) \cdot X(T\tau) = T \cdot K(T\tau) \cdot U(T\tau); \quad a) \\ Y(T\tau) = C(T\tau) \cdot X(T\tau) \quad b) \end{array} \right\} \tau \in [0, 1]. \quad (2)$$

Определение 1.

Нестационарную динамическую систему вида (1) назовем асимптотически устойчивой, если при всяком начальном условии $X(0) = X_0$, конечным по норме

$$\|X_0\| < \infty,$$

существует асимптотически устойчивое решение задачи Коши

$$\frac{dX(t)}{dt} + A(t) \cdot X(t) = 0; \quad X(0) = X_0; \quad \|X_0\|_{\mathfrak{I}} < \infty, \quad (3)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0; \quad \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\|_{\mathfrak{I}} = 0 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \|X(T)\|_{\mathfrak{I}} = 0. \quad (4)$$

Теорема 1. Если системная матрица

$$A = A(t) (n \times n) \quad t \geq 0$$

однородной задачи Коши (4) положительно определена (ПО) при всех $t \geq 0$, то всякое ее решение с конечным по норме начальным условием

$$X(0) = X_0; \|X_0\|_{\mathcal{E}} < \infty,$$

окажется асимптотически устойчивым.

Асимптотическая устойчивость определяемая по точечным моделям задачи Коши (4)

Точечное решение задачи Коши сводится к точечному решению интегрального уравнения

$$X(T\tau) + T \int_0^\tau A(T\eta)X(T\eta)d\eta = X_0; \tau \in [0,1],$$

что и было выполнено, так и на основе как чебышевской N -сетки I рода, так и на основе чебышевской $2N$ -сетки II рода.

Для таких решений были получены следующие представления:

Для N -сетки I рода

$$X_{T_1} = T_N^{-1} [-B_v] \cdot (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X_0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n \\ \dots \\ B_1 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \prod_{i=1}^{N-1} B_{v-i} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} \end{bmatrix} (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} X_0. \quad (10)$$

Для последней блочной компоненты этого решения будем иметь

$$X(T\tau_N^{(N)}) = X(\lambda_0(2N-1)) = \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} \cdot (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} \cdot X_0,$$

здесь обозначено:

$$-B_{N-i} = (E_n + \lambda_0 A_{N-i+1})^{-1} \cdot (E_n - \lambda_0 A_{N-i}) \quad (i = \overline{1, (N-1)}); \quad \lambda_0 = \frac{T}{2N},$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{N-i+1} = A(T\tau_{N-i+1}^{(N)}) = A(\lambda_0(2(N-i)) + 1) \quad a) \\ A_{N-i} = A(T\tau_{N-i}^{(N)}) = A(\lambda_0(2(N-i)) - 1) \quad b) \end{array} \right\} \quad (i = \overline{1, (N-1)}).$$

Для N -сетки II рода

$$\bar{X}_{T_{\text{II}}} = T_{2N}^{-1} [\alpha_k] \cdot \alpha_0 \bar{e}_1^{(2N)} (E_n) \cdot X_0 = \begin{bmatrix} E_n \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_2 \alpha_1 \\ \dots \\ \prod_{v=1}^{k-1} \alpha_{k-v} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \end{bmatrix} \cdot \alpha_0 X_0, \quad (11)$$

Для последней блочной компоненты этого решения будем иметь:

$$X(T\theta_{2N}^{(2N)}) = X(T) = X(\lambda_0 \cdot 2N) = \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \cdot \alpha_0 \cdot X_0 = \prod_{v=1}^{2N} \alpha_{2N-v} \cdot X_0,$$

где

$$\alpha_{2N-v} = \left(E_n + \frac{\lambda_0}{2} \cdot A_{2N-v+1} \right)^{-1} \cdot \left(E_n - \frac{\lambda_0}{2} \cdot A_{2N-v} \right) \left(v = \overline{1, 2N} \right);$$

$$\left. \begin{aligned} A_{2N-v} &= A(T\theta_{2N-v}^{(2N)}) = A(2\lambda_0(2N-v)); & a) \\ A_{2N-v+1} &= A(T\theta_{2N-v+1}^{(2N)}) = A(2\lambda_0(2N-v+1)) & b) \end{aligned} \right\} \left(v = \overline{1, 2N} \right).$$

Асимптотическая устойчивость решений задачи (4), устанавливаемая по их точечным представлениям означает существование нулевых предельных значений для последних блочных компонент при

$$N \rightarrow \infty \text{ и } T \rightarrow \infty,$$

но при конечном и заданном значении параметра $\lambda_0 = \frac{T}{2N} = \text{const}$,

т. е. пределов

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|X(\lambda_0(2N-1))\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} (E_n + \lambda_0 A_l)^{-1} \cdot X_0 \right\| = 0; \quad a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|X(\lambda_0 2N)\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \cdot X_0 \right\| = 0. \quad b)$$

Выбранные нормы векторов и матриц должны быть согласованы между собой.

Введем ℓ_1 – норму $\|X_0\|_1$ n -вектора

$X_0 = Colon[x_1(0), \dots, x_i(0), \dots, x_n(0)]$, полагая $\|X_0\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i(0)|$.

С ней согласована т. н. максимальная столбцовая норма всякой матрицы $(n \times n)$, поэтому оценки для норм векторно-матричных представлений могут быть записаны в виде

$$\left\| \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} \cdot X_0 \right\|_1 \leq \left\| \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} \right\|_1 \cdot \left\| (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} \right\|_1 \cdot \|X_0\|_1;$$

$$\left\| \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \cdot X_0 \right\|_1 \leq \left\| \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \right\|_1 \cdot \|X_0\|_1.$$

и для пределов будем иметь оценки

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|X(\lambda_0(2N-1))\|_1 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} \right\|_1 \cdot \left\| (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} \right\|_1 \cdot \|X_0\|_1;$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|X(\lambda_0 2N)\|_1 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \right\|_1 \cdot \|X_0\|_1.$$

Они будут давать нулевые значения при $\|X_0\|_1 \neq 0$, если окажется

$$\left. \begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} \right\|_1 \cdot \left\| (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} \right\|_1 = 0; \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \right\|_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Причем при любых N конечна норма

$$\left\| (E_n + \lambda_0 A_1)^{-1} \right\|_1 = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda_0 A_1)^k \right\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\lambda_0 A_1\|_1^k = \frac{1}{1 - \lambda_0 \|A_1\|_1}.$$

Теорема 2. Если системная матрица $A(t)$ ($n \times n$) задачи Коши (4) окажется ПО-матрицей при всех $t \geq 0$, то нормы матриц в произведениях представлений (12) при любых N будут иметь оценки

$$\left. \begin{array}{l} \|B_{N-i}\|_1 \leq b < 1; \quad i = \overline{1, (N-1)} \\ \|\alpha_{2N-v}\|_1 \leq a < 1; \quad v = \overline{1, 2N} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a) \\ b) \end{array}$$

и, следовательно, будем иметь нулевые пределы для норм произведений:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{i=1}^{N-1} B_{N-i} \right\|_1 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} \|B_{N-i}\|_1 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} b^{N-1} = 0; \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \prod_{v=1}^{2N-1} \alpha_{2N-v} \right\|_1 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^{2N-1} \|\alpha_{2N-v}\|_1 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} a^{2N-1} = 0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} a) \\ b) \end{array}$$

означающие выполнение условий (12),
т. е. асимптотическую устойчивость решений задачи (4).

Теорема 3. Если для нестационарной динамической системы (1) (или (2)) выполняются условия:

1. системная матрица $A(t) = A(T\tau)$ ($n \times n$); $\tau \in [0, 1]$ при всех $T > 0$ оказывается ПО-матрицей с конечной нормой $\|A(T\tau)\|_1$;
2. параметр $\lambda_0 = \frac{T}{2N}$ при всех T и N фиксирован некоторым значением, при котором выполняется строгое неравенство

$$\lambda_0 \|A(T\tau)\|_1 < 1; \quad T > 0; \quad \tau \in [0, 1];$$

3. н матриц $\|K(T\tau)\|_1 \|K(T\tau)\|_1 \|C(T\tau)\|_1$ и выхода $C(T\tau)$ ($r \times n$) при любых $T > 0$ и $\tau \in [0, 1]$ окажутся ограниченными;
4. для размерности этих матриц выполняется условие $r = n \leq q$, причем, при этом матрица $K(T\tau)$ ($n \times q$) имеет ранг n , такой же ранг имеет и квадратная матрица $C(T\tau)$ ($r \times n$), **то:**

- a) существуют точечные модели, являющиеся гомоморфными точечными отображениями решений задачи Коши для уравнений (2) при нулевых начальных условиях и ограниченных воздействиях $\|U(T\tau)\|_1, \tau \in [0, 1]$;
- b) точечные модели будут обладать свойством устойчивости в смысле «ограниченный вход – ограниченный выход», что для их временного оригинала – динамической системы (1) (или (2)), будет означать устойчивость в обычном смысле;
- c) система (2) окажется управляемой как по фазовым переменным $X(T\tau)$, так и по переменным выхода $Y(T\tau)$, а также наблюдаемой в обоих указанных смыслах.

Кроме этого доказана аналогичная теорема для точечной модели нестационарной динамической системы вида (2), как объекта управления, охваченного жесткой отрицательной обратной связью (ОС), реализуемой постоянной матрицей $K_{\text{ОС}}$ ($n \times n$), т. е. как системы автоматического управления (регулирования).

Статьи автора по докладу

Журналы из перечня ВАК:

- Осипов, В.В. Устойчивость тёплицевых матриц и их положительная определенность / В.В. Осипов, В.М. Осипов // Вестник СибГАУ, Вып. 5(12), 2006, – С. 194–201.
- Осипов, В.В. Аналитические модели переходных характеристик линейных динамических систем / В.В. Осипов // ГИАБ 2008.– № 3. – С. 29–37.
- Осипов, В.В. О непосредственной связи устойчивости линейных динамических систем с устойчивостью тёплицевых матриц. / В.В. Осипов // ГИАБ, 2008. № 6. – С.44–57.
- Осипов, В.В. О положительной определённости и положительности функций и некоторых приложениях. / В.В. Осипов, В.М. Осипов // ГИАБ, 2008. № 8. – С. 93–102.
- Осипов, В.В. Решение экстремальных задач терминального управления методом точечных представлений. / В.В. Осипов // Системы методы технологии, 2009. № 3. – С. 52–58.
- Осипов, В.В. Решение уравнений с запаздывающим аргументом методом точечных представлений / В.В. Осипов // Системы методы технологии, 2009. № 3. – С. 45–51.
- Осипов, В. В. Точечное моделирование операции свертки / В.В. Осипов // Системы методы технологии, 2009. № 4. – С. 56–63.
- Осипов, В. В. Идейные основы метода точечных представлений. / В.В. Осипов // Системы методы технологии, 2010.№ 4, – С. 32–38.
- Осипов, В. В. О связи точечных представлений функций и их изображений по Лапласу / В.В. Осипов // Вестник СибГАУ Вып., 2011, 1(34). – С.56 – 62.
- Осипов, В. В. Точечные модели многомерных линейных динамических систем / В.В. Осипов // Вестник Кемеровского государственного университета, – 2011. №3. – С. 85–92.
- Осипов, В. В. Управляемость линейных динамических систем как свойство их точечных моделей / В.В. Осипов // Вестник Кемеровского государственного университета, – 2011. – № 4. – С. 78–84.
- Осипов В. В. Некоторые экстремально-оценочные задачи для норм в матрично-векторных представлениях/ В.В. Осипов // Вестник СВФУ им. М.К.Аммосова, – 2013. – № 5. – С.12–18.

Монографии

- Осипов, В. В. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений / В.В.Осипов, В.М. Осипов // М.: МАКС Пресс, 2005. – 296 с.
- Осипов, В. В. Положительная определённость и положительность функций. Элементы теории и некоторые приложения / В. В. Осипов, В. М. Осипов // Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2008. – 415с.
- Осипов, В. В. Точечное моделирование и преобразования Лапласа и Фурье / В. В. Осипов // – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 416 с.
- Осипов, В.В. Моделирование динамических процессов методом точечных представлений / В.В.Осипов //– Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. – 304 с.

Спасибо за внимание