О ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ КОЛЬЦЕ КОГОМОЛОГИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ

Д. В. Гугнин

Доклад основан на недавнем препринте автора (arXiv: 1502.01862v1). Через $\mathrm{Sym}^n X$ обозначим n-ю симметрическую степень X^n/S_n топологического пространства X. Знаменитая теорема Дольда'58 утверждает, что если два связных CW комплекса X и Y имеют изоморфные целочисленные гомологии $H_i(X;\mathbb{Z}) \cong H_i(Y;\mathbb{Z}), 1 \le i \le q$, тогда $H_i(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Z}) \cong H_i(\mathrm{Sym}^n Y;\mathbb{Z}), 1 \le i \le q$, для всех $n \ge 2$.

Мы скажем, что связный CW комплекс X имеет конечный гомологический тип, если все группы $H_i(X;\mathbb{Z}), 1 \le i < \infty$ конечно порождены. Из теоремы Дольда сразу вытекает, что в этом случае пространство $\mathrm{Sym}^n X$ также конечного гомологического типа. Таким образом, имеются естественные изоморфизмы

$$H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong (H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}) \otimes \mathbb{Q} \cong H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Q}).$$

Будем считать, что все пространства рассматриваемые далее имеют конечный гомологический тип. Если два CW комплекса X и Y имеют изоморфные рациональные кольца когомологий $H^*(X;\mathbb{Q}) = H^*(Y;\mathbb{Q}) = A^*$, то по классической Теореме о Трансфере имеется естественный изоморфизм:

$$H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Q}) = H^*(\mathrm{Sym}^n Y;\mathbb{Q}) = S^n A^*, \quad S^n A^* := (A^{\otimes n})^{S_n}.$$

Теорема 1(Г., 2015). *Пусть связные CW комплексы X и Y имеют конечный гомологический тип. Если $H^*(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor} \cong H^*(Y;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$, тогда для всех $n \ge 2$ существует изоморфизм колец*

$$H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor} \cong H^*(\mathrm{Sym}^n Y;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}.$$

Более того, для любого аддитивного базиса

$$a_{i,j} \in H^i(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}, 1 \le i < \infty, 1 \le j \le \mathrm{rank}(H^i(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}),$$

и заданной целочисленной таблице умножения $a_{i,j}a_{k,l} = c_{i,j;k,l}^{s,t} a_{s,t}$ существует простой алгоритм для построения определенного аддитивного базиса $H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}, n \ge 2$, и вычисления соответствующей таблицы умножения.

Другими словами, данная теорема утверждает, что кольцо $H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$ есть функтор (явно описываемый) от кольца $H^*(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$. Данный результат нельзя просто извлечь из результата над $\mathbb{Q}$ в силу следующего феномена:

Существуют полиэдры (многообразия) L и M с изоморфными рациональными кольцами когомологий $H^*(L;\mathbb{Q}) \cong H^*(M;\mathbb{Q})$, но неизоморфными кольцами $H^*(L;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor} \ncong H^*(M;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}$.

Базовый пример: $L = S^2 \times S^2$ и $M = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$, здесь $\overline{\mathbb{C}P}^2$ — это многообразие $\mathbb{C}P^2$, взятое с противоположной ориентацией. В данном примере оба многообразия даже не имеют кручения в гомологиях.

Первый и наиболее трудный шаг доказательства Теоремы 1 — Лемма целочисленности, доказанная автором в 2012 г. (Труды ММО (2012) Т. 73. вып. 2. с. 207-228.) Данная лемма утверждает целочисленность некоторых специальных классов из $H^*(\mathrm{Sym}^n X;\mathbb{Q})$, для которых линейная алгебра (Трансфер над $\mathbb{Z}$) дает целочисленность только при умножении на $(n-1)!$.

Несложно проверяется, что для любого k-мерного топологического многообразия M^k и для любого $n \ge 2$ пространство $\mathrm{Sym}^n M^k$ является многообразием без края тогда и только тогда, когда $k = 2$. Классический факт алгебраической геометрии утверждает, что $\mathrm{Sym}^n M_g^2, n \ge 2$, обладает канонической структурой гладкого проективного алгебраического многообразия для любой компактной Римановой поверхности M_g^2 произвольного рода $g \ge 0$. Несложно доказать, что $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n$. Пусть $g \ge 1$.

Знаменитая **теорема Макдональда'62** утверждает, что (1) кольцо $H^*(\mathrm{Sym}^n M_g^2;\mathbb{Z})$ не имеет кручения, и (2) дается явное описание данного кольца как фактора свободного коммутативного кольца над $\mathbb{Z}$ от $2g$ одномерных образующих и одной двумерной образующей по явно выписанной системе целочисленных соотношений (идеал Макдональда).

Однако, как было замечено автором в 2012 г., доказательство теоремы Макдональда опиралось на утверждение, которое вообще говоря неверно. Более подробный анализ доказательства выявляет три последовательных пробела. Первые два пробела устраняются Леммой целочисленности и Теоремой 1. Третий пробел устраняется дополнительными алгебраическими рассуждениями.

Второй основной результат доклада — верификация данной теоремы Макдональда.