Потоки броуновских частиц и стохастические интегралы

А. А. Дороговцев

adoro@imath.kiev.ua

February 13, 2015

Пример. Стохастическое дифференциальное уравнение, которое задает поток броуновских движений

$$dx(u,t) = \cos x(u,t)dw_1(t) + \sin x(u,t)dw_2(t),$$

$$x(u,0) = u, \ u \in \mathbf{R}$$

w_1, w_2—независимые винеровские процессы

При каждом $u \in \mathbb{R}$ $x(u,\bullet)$—броуновское движение, которое начинается в точке u,

для $u_1 \leq u_2$ при всех $t \geq 0$ $x(u_1,t) \leq x(u_2,t)$,

$x(u_2,t) - x(u_1,t) \to 0, \ t \to +\infty,$ п.н.

Γ—четная, гладкая, неотрицательно определённая функция на $\mathbb{R}$ такая, что $\Gamma(0) = 1$

Существуют

1. Гауссовский стационарный центрированный процесс
$\xi(u),\ u \in \mathbb{R}$,
$\mathbf{M}\xi(u_1)\xi(u_2) = \Gamma(u_1 - u_2)$.

2. Гладкая функция $b : \mathbb{R} \to l_2$, для которой скалярное произведение
$(b(u_1),\ b(u_2)) = \Gamma(u_1 - u_2)$.

3. Семейство броуновских мартингалов относительно общей фильтрации
$x(u, t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0$, обладающее свойствами

3.1. для $u_1 \leq u_2$ при всех $t \geq 0$ $x(u_1, t) \leq x(u_2, t)$,

3.2. $d < x(u_1, \bullet),\ x(u_2, \bullet) > (t) = \Gamma(x(u_1, t) - x(u_2, t))$

Семейство $x(u,t)$, $u \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ может быть получено как совокупность решений стохастического дифференциального уравнения

$$dx(u,t) = F(x(u,t), dt),$$

$$x(u,0) = u, \ u \in \mathbb{R},$$

в котором центрированное гауссовское случайное поле F имеет ковариацию

$$\mathbf{M} F(u_1, t) F(u_2, s) = \Gamma(u_1 - u_2) t \wedge s,$$

или

$$dx(u,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x(u,t)) dw_k(t)$$

Преимущества представления семейства броуновских мартингалов
$x(u,t),\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0$
с помощью стохастического дифференциального уравнения
1. Функционалы от x - это функционалы от гауссовского случайного поля F
(представление Крылова-Веретенникова для $f(x(u,t))$, большие уклонения для x в пространстве диффеоморфизмов, теорема Гирсанова)
2. Возможность построения семейств возмущенных броуновских движений с
помощью возмущения исходного уравнения, например,

$$dx(u,t) = a(x(u,t))dt + F(x(u,t),dt)$$

3. Существование потока диффеоморфизмов, отвечающего решениям, стартовавшим
в произвольные моменты времени

$$d\varphi_{s,t}(u) = F(\varphi_{s,t}(u), dt),$$

$$\varphi_{s,s}(u) = u, \; u \in \mathbb{R},$$

В частности, $x(u,t) = \varphi_{0,t}(u)$

Поле F может быть восстановлено по потоку $\varphi_{s,t}$, $0 \leq s \leq t$

$$F(u,t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi_{\frac{kt}{n},\frac{(k+1)t}{n}}(u) - u)$$

Соответствие $x \longleftrightarrow F$ для броуновских потоков с гладкой ковариацией Γ позволяет получить:
разложение Крылова-Веретенникова, стохастические интегралы по потоку,
возмущенные потоки ...
Основной вопрос доклада: что будет в случае негладкой (или даже разрывной Γ)?

Определение. Поток Харриса
Семейство броуновских мартингалов относительно общей фильтрации
$x(u,t)$, $u\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$, обладающее свойствами
1. для $u_1\leq u_2$ при всех $t\geq 0$ $x(u_1,t)\leq x(u_2,t)$,
2. $d<x(u_1,\bullet), x(u_2,\bullet)>(t)=\Gamma(x(u_1,t)-x(u_2,t))$,
Γ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица вне любой окрестности 0
Определение. Поток Арратья $\Gamma=\mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}$

В потоке Харриса частицы могут склеиваться, а именно, если

$$\tau(u,v)=\inf\{t\geq 0:\ x(u,t)=x(v,t)\},$$

то

$$\forall\, u,\ v\in\mathbb{R}:\ \mathbf{P}\{\tau(u,v)<+\infty\}=1 \iff \int_0^{\varepsilon}\frac{u}{1-\Gamma(u)}du<+\infty$$

Как устроен образ $x(\mathbb{R}, t)$?
Каковы геометрические свойства отображений $x(\bullet, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Энтропия стохастического потока

H - вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\{u_n\}$- последовательность (возможно конечная) элементов H, πu_n - ортогональная составляющая u_n линейной оболочки остальных членов последовательности.

Определение. Квадратичная энтропия множества $A \subset H$ - это

$$\mathscr{H}_2(A) = \sup \sum_n \| \pi u_n \|^2,$$

где верхняя грань берётся по всем конечным или бесконечным последовательностям элементов множества A.

Энтропия стохастического потока

Определение. Множество A называется σ_2 -ограниченным, если

$$\sup \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{h \in A} (h,\ e_k)^2 < +\infty$$

Лемма. Квадратичная энтропия конечна для σ_2 -ограниченных множеств.

Теорема. Множество A является σ_2 -ограниченным тогда и только тогда, когда существует такой оператор Гильберта-Шмидта Q в H, что $A \subset Q(B(0;1))$.

Энтропия стохастического потока

Определение. Множество A называется σ_2 -ограниченным, если

$$\sup \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{h\in A}(h,\ e_k)^2 < +\infty$$

Лемма. Квадратичная энтропия конечна для σ_2 -ограниченных множеств.

Теорема. Множество A является σ_2 -ограниченным тогда и только тогда, когда существует такой оператор Гильберта-Шмидта Q в H, что $A \subset Q(B(0;1))$.

Энтропия стохастического потока

Пусть $x(u,t)$, $u \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$ - семейство броуновских мартингалов относительно общей фильтрации обладающее свойством монотонности, т.е. для $u_1 \leq u_2$ при всех $t \geq 0$ $x(u_1,t) \leq x(u_2,t)$.

Теорема. Множество случайных величин $\{x(u,1),\ u \in [0;1]\} \subset L_2$ имеет конечную квадратичную энтропию.

Следствие. Суммарный свободный пробег в потоке Арратья конечен.

Следствие. В каждый положительный момент времени в потоке Арратья есть только конечное число кластеров.

Что является аналогом таких утверждений для потока Харриса или потока решений стохастического дифференциального уравнения?

Правильная метрика в пространстве образов броуновского потока

Пусть Γ - коваріация в потоке Харриса
$(d < x(u_1, \bullet), x(u_2, \bullet) > (t) = \Gamma(x(u_1, t) - x(u_2, t)))$
H_Γ- пополнение множества функций

$$\left\{ f(\bullet) = \sum_{k=1}^{n} c_k \Gamma(u_k - \bullet) \right\}$$

относительно скалярного произведения

$$(f, g)_\Gamma = \sum_{k,l=1}^{n,m} c_k d_l \Gamma(u_k - v_l)$$

Правильная метрика в пространстве образов броуновского потока

Пусть $x(u,t)$, $u \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$ - поток Харриса с ковариацией Γ (возможно разрывной в 0)

Теорема. С вероятностью единица множество функций $\{\Gamma(x(u,1)-\bullet),\ u \in [0;1]\} \subset H_\Gamma$ имеет конечную квадратичную энтропию.

Следствие. Если в потоке Харриса $1-\Gamma(u) \sim |\ u\ |^{\alpha}$, $\alpha \in (0;\ 1)$, то при $t > 0$ с вероятностью 1 образ $x(\mathbf{R},t)$ является счётным множеством.

Формула Троттера

$$e^{(A+B)t} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{At}{n}} e^{\frac{Bt}{n}} \right)^n$$

Метод дробных шагов

$$dx(t) = F_1(x(t), dt) + F_2(x(t), dt)$$

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi^2_{\frac{t(n-1)}{n},t} \circ \varphi^1_{\frac{t(n-1)}{n},t} \circ \ldots \circ \varphi^2_{0,\frac{t}{n}} \circ \varphi^1_{0,\frac{t}{n}}$$

Существование исходных векторных полей гарантирует сходимость по вероятности

Пусть $\varphi_{s,t} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ s \leq t$ - сеть Арратья, т.е.
$\varphi_{t_1,\cdot}(u_1), \ldots, \varphi_{t_n,\cdot}(u_n)$ - склеивающиеся броуновские движения,
g_t -решение дифференциального уравнения

$$dg_t(u) = a(g_t(u))dt$$

с функцией a удовлетворяющей условию Липшица

$$x_a^n(u,t) = \mathop{\circ}_{k=0}^{\frac{k}{n}\leq t} g_{\frac{1}{n}}(\varphi_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}})(u)$$

Теорема (Совместно с Н.Б.Вовчанским). Процесс $(x_a^n(u_1),\ldots,x_a^n(u_m))$ слабо сходится в $D([0;1],\mathbf{R}^m)$ к m-точечному движению потока Арратья со сносом a.
Определение. Поток Арратья со сносом $x_a(u,t)$, $u\in\mathbf{R}$, $t\geq 0$:
1. для каждого $u\in\mathbf{R}$ $x_a(u,t)$, $t\geq 0$ _ диффузионный процесс со сносом a и единичной диффузией
2. для $u_1\leq u_2$ при всех $t\geq 0$ $x(u_1,t)\leq x(u_2,t)$,
3. $d<x(u_1,\bullet),\ x(u_2,\bullet)>(t)=\mathbf{1}_{\{0\}}(x(u_1,t)-x(u_2,t))dt$
Сходимость только слабая!

Теорема. Пусть $f: [0;1] \to$ - непрерывная случайная функция, согласованная с фильтрацией порождённой φ. Выражения

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

сходятся по вероятности тогда и только тогда когда f совпадает с $\varphi_{0,\bullet}(u)$ для некоторого u.

Если на отрезке $[\alpha;\beta]$ $x(u,t)-f(t)>0$, то

$$\lim_{n\to\infty} M\sum_{\frac{k}{n}\geq\alpha}^{\frac{k+1}{n}\leq\beta}\left(_{\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\int_0^1 a(s)dx(u,s)=0$$

Разложение Крылова - Веретенникова

$$dx(u,t) = a(x(u,t))dt + b(x(u,t))dw(t)$$

$$\mathscr{F}_t = \sigma(w(s); s \leq t)$$

$$L_2(\mathscr{F}_t) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$$

H_k - множество всех кратных интегралов вида

$$\int_{\Delta_k(t)} a_k(t_1, \ldots, t_k) dw(t_1) \ldots dw(t_k),$$

$$\Delta_k(t) = \{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t\}$$

Пример. Разложение Крылова-Веретенникова

$$f(x(u,t)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n(t)} T_{t_1} b \frac{\partial}{\partial y_1} T_{t_2-t_1}, \ldots, b \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} T_{t-t_n} f(u) dw(t_1) \ldots dw(t_n)$$

Разложение Крылова - Веретенникова для n-точечных движений потока Арратья

Конструкция потока Арратья из независимых винеровских процессов. $w_k,\ k \geq 1$- независимые винеровские процессы, $r_k,\ k \geq 1$- все рациональные числа на прямой.

$$x(r_1, t) = w_1(t),\ \ t \leq 0,$$

$$\sigma_{n+1} = \inf\{t :\ \prod_{k=1}^{n}(x(r_k, t) - w_{n+1}(t)) = 0\},$$

$$x(r_{n+1}, t) = \begin{cases} w_{n+1}(t), & t \leq \sigma_{n+1} \\ x(r_{k^*}, t), & t \geq \sigma_{n+1}, \end{cases}$$

где

$$x(r_{k^*}, \sigma_{n+1}) = w_{n+1}(\sigma_{n+1})$$

Разложение Крылова - Веретенникова для n-точечных движений потока Арратья

Пусть $u_1 < u_2 < ... < u_n$ и $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t \geq 0$ - соответствующие броуновские движения из потока Арратья. Последовательность склеек процессов $x_1, x_2, ..., x_n$ естественным образом задаёт последовательность разбиений множества чисел
$1, 2, ..., n$ на блоки номеров процессов склеившихся к данному моменту.
$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1}$ - моменты склейки, $\tilde{\nu} = \{\pi_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}\}$ - соответствующая последовательность разбиений,

$$T_t^{\tilde{\pi}} f(u_1, \ldots, u_n) = Ef(x_1(t), \ldots, x_n(t))_{\{\nu_1 = \pi_1, \ldots, \nu_k = \pi_k, \tau_k \leq t < \tau_{k+1}\}}.$$

Разложение Крылова - Веретенникова для n-точечных движений потока Арратья

Теорема.

$$f(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{\tilde{\pi} \in \check{R}} T_t^{\tilde{\pi}} f(u_1, \ldots, u_n) +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \sum_{\tilde{\pi} \in R_k} \int T_{s_1}^{\tilde{\pi}_1} \partial_{i_1} T_{s_2 - s_1}^{\tilde{\pi}_2} \ldots \partial_{i_k} T_{t - s_1}^{\tilde{\pi}_{k+1}}$$

$$f(u_1, \ldots, u_n) dw_{i_1}(s_1) \ldots dw_{i_k}(s_k)$$

Ортогональное разложение для функционалов от остановленного винеровского процесса

$g \in C([0;1]),\ g(0) \neq 0,\ w$ - стандартный винеровский процесс,
$\tau = \inf\{t : w(t) = g(t)\},$
или 1

$$\tau = \inf\{t : w(t) = g(t)\}$$

Как выглядит ортогональное разложение для $L_2(\eta)$?

Основная трудность:
Интегралы

$$\int_{\Delta_n(\tau)} a_n(t_1, \ldots, t_n) dw(t_1) \ldots dw(t_n)$$

не ортогональны

Ортогональное разложение для функционалов от остановленного винеровского процесса

Пусть $\alpha(u,s,t) = P_{n,s}\{\tau \geq t\}$

$$I_n^t a_n = \int_{\Delta_n(t)} a_n(t_1,\ldots,t_n)(dw(t_1) - (\ln\alpha)'_1(w(t_1),t_1,t)dt_1)\cdot\ldots$$

$$\cdot(dw(t_n) - (\ln\alpha)'_1(w(t_n),t_n,t)dt_n)$$

Ортогональное разложение для функционалов от остановленного винеровского процесса

Теорема (совместно с Г.В.Рябовым)

$$L_2(\eta) = \oplus_{n=0}^{\infty} H_n,$$

где H_n- это пространство интегралов вида

$$\int_0^{\tau} I_{n-1}^t a_n(\cdot \dots \cdot, t) d\eta(t)$$

Спасибо за внимание!