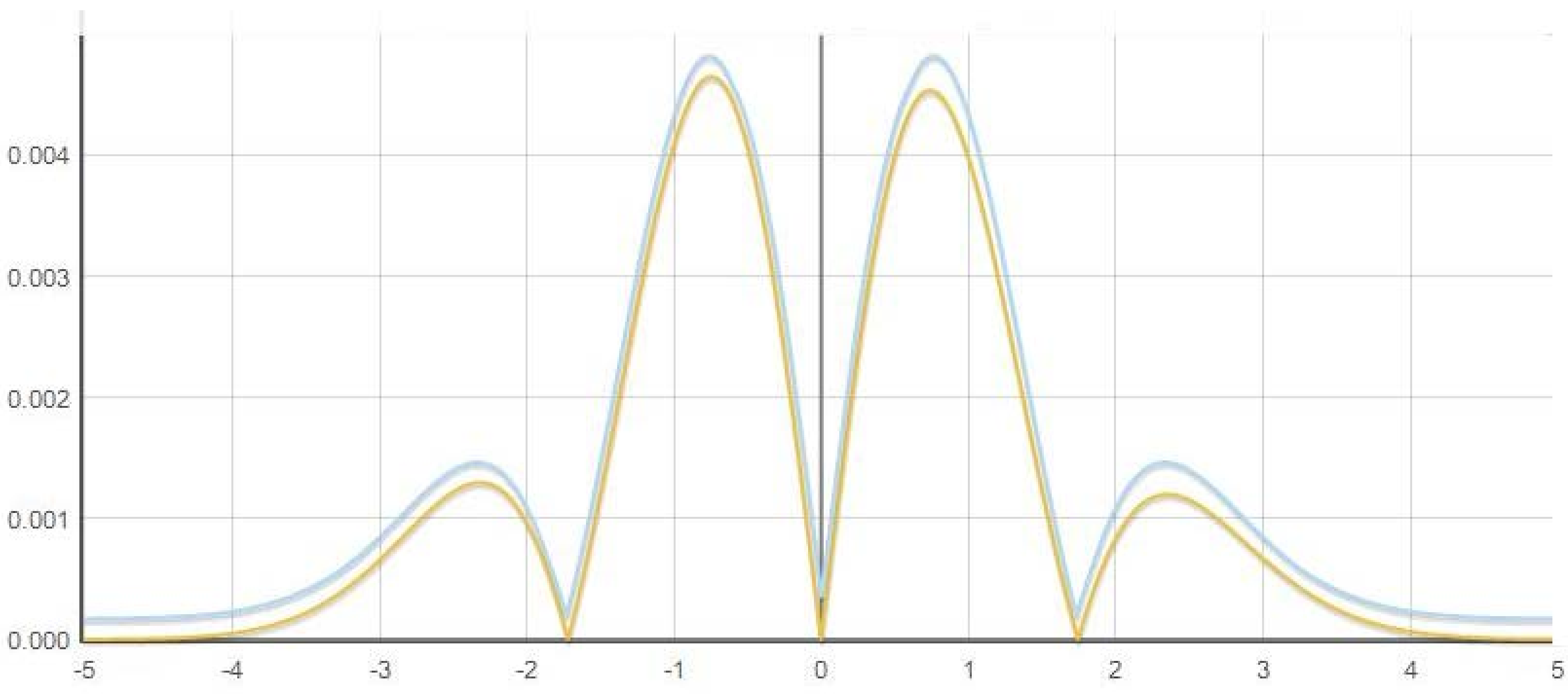
О новом типе оценок точности аппроксимации в ЦПТ

В.В.Сенатов



Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределённые случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и общим распределением P. Обозначим P_n распределение нормированной суммы $\frac{(X_1+\cdots+X_n)}{\sqrt{n}}$ и Φ – нормальный закон с плотностью $\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $F_n(x)$ и $G(x)$ – функции распределения мер P_n и Φ. ЦПТ утверждает, что при $n \to \infty$

$$F_n(x) \to G(x) \text{ равномерно по } -\infty < x < \infty,$$

т. е.

$$\rho(F_n, G) = sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x) - G(x)| \to 0,$$

поэтому для оценки точности нормальной аппроксимации можно оценивать $\rho(F_n, G)$.

Можно не означает нужно.

Далее

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k P(dx),\ k = 3, 4, \ldots,\ \text{и}\ \beta_s = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s P(dx),\ s > 2.$$

Теорема Берри – Эссеена (А. Берри, 1941, К-Г. Эссеен, 1942)

$$\rho(F_n, G) \le c\,\frac{\beta_3}{\sqrt{n}},$$

где $c > 0$ – постоянная.

К.-Г. Эссеен утверждал, что $c \le 7.59$, А. Берри утверждал, что $c \le 1.88$, но его вычисления содержали ошибку, ……… В 1956 г. К.-Г. Эссеен получил нижнюю оценку

$$c \ge c_E = \frac{3 + \sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0.4097\ldots\ .$$

Нижняя оценка доказывается с привлечением распределения Эссеена, которое является частным случаем распределения Бернулли. Распределения Бернулли с нулевым средним и единичной дисперсией образуют однопараметрическое семейство, для них

$$P\left(\left\{-\frac{p}{\sqrt{pq}}\right\}\right)=q, \qquad P\left(\left\{\frac{q}{\sqrt{pq}}\right\}\right)=p, \qquad q=1-p, \qquad 0<p<1\,.$$

Это распределение является решетчатым с шагом $h=\frac{1}{\sqrt{pq}}\geq 2$. Распределение нормированной суммы $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ независимых случайных величин с этим распределением также является решетчатым с шагом $h/\sqrt{n}$, оно сосредоточено на решетке

$$D_n=\left\{-p\sqrt{\frac{n}{pq}}+k\frac{h}{\sqrt{n}}\,, k=0,\pm 1,\pm 2,\dots\right\}.$$

Для распределения Эссеена $p = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$ и для него

$$\rho(F_n, G) \sim c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}.$$

В 2001 г. Г. П. Чистяков получил оценку

$$\rho(F_n, G) \leq c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + C \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\right)^{40/39} \left|\ln \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\right|^{7/6},$$

где C – некоторая постоянная, а в 2012 г. И. Г. Шевцова получила оценку

$$\rho(F_n, G) \leq c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + 2.58 \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\right)^2.$$

Последний результат делает дальнейшие попытки уточнения оценки теоремы Берри – Эссеена бессмысленными.

В 1937 г. были получены два следующих результата. Г. Крамер установил, что при выполнении условия $\overline{\lim}_{t\to\infty}|f(t)| < 1$, где $f(t)$ – характеристическая функция распределения P, справедливо равенство

$$F_n(x) - G(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{\alpha_3}{\sqrt{n}}(1-x^2)e^{-x^2/2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad -\infty < x < \infty, \qquad n \to \infty.$$

Я. В. Успенский получил результат, их которого следует, что если P – распределение Бернулли, то при $npq \geq 25$

$$F_n(x) - G(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{\alpha_3}{\sqrt{n}}(1-x^2)e^{-x^2/2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad x \in D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}},$$

$$\left|O\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{0.13 + 0.18|p-q|}{npq} + e^{-3\sqrt{npq}/2}.$$

Для распределения Эссеена из результата Я. В. Успенского следует, что

$$\max\left\{|F_n(x) - G(x)|: x \in D_n + \frac{h}{2\sqrt{n}}\right\} \le \frac{0.022}{\sqrt{n}} + \frac{0.655}{n} + e^{-0.74\sqrt{n}}.$$

Это неравенство можно записать в виде

$$\rho\left(F_n, G_n^{a,h}\right) \le \frac{0.022}{\sqrt{n}} + \frac{0.655}{n} + e^{-0.74\sqrt{n}},$$

где $G_n^{a,h}(x)$ – решетчатая функция распределения, постоянная на интервалах постоянства $F_n(x)$, и совпадающая с $G(x)$ в серединах этих интервалов.

В то же время, для распределения Эссеена $\beta_3 = 1.04 \ldots$ и правая часть оценки Берри – Эссеена для распределения Эссеена больше

$$c_E \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} > 0.4097 \frac{1.04}{\sqrt{n}} = \frac{0.426}{\sqrt{n}}.$$

Для распределения Бернулли $\alpha_3 = (q-p)/\sqrt{pq}$ и мы можем считать, что $0 < p \le 0.5$. Рассмотрим интервал (x_n', x_n'') постоянства F_n, середина которого $x_n^* = (x_n' + x_n'')/2$ ближе всего к нулю. Из результата Я. В. Успенского следует, что

$$F_n(x_n^*) - G(x_n^*) = \frac{q-p}{6\sqrt{2\pi npq}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0.$$

Очевидно, что

$$F_n(x_n' + 0) - G(x_n' + 0) = \frac{q-p}{6\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{h}{2\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{q-p+3}{6\sqrt{2\pi npq}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \le c\frac{\beta_3}{\sqrt{n}},$$

где c – постоянная из оценки Берри – Эссеена.

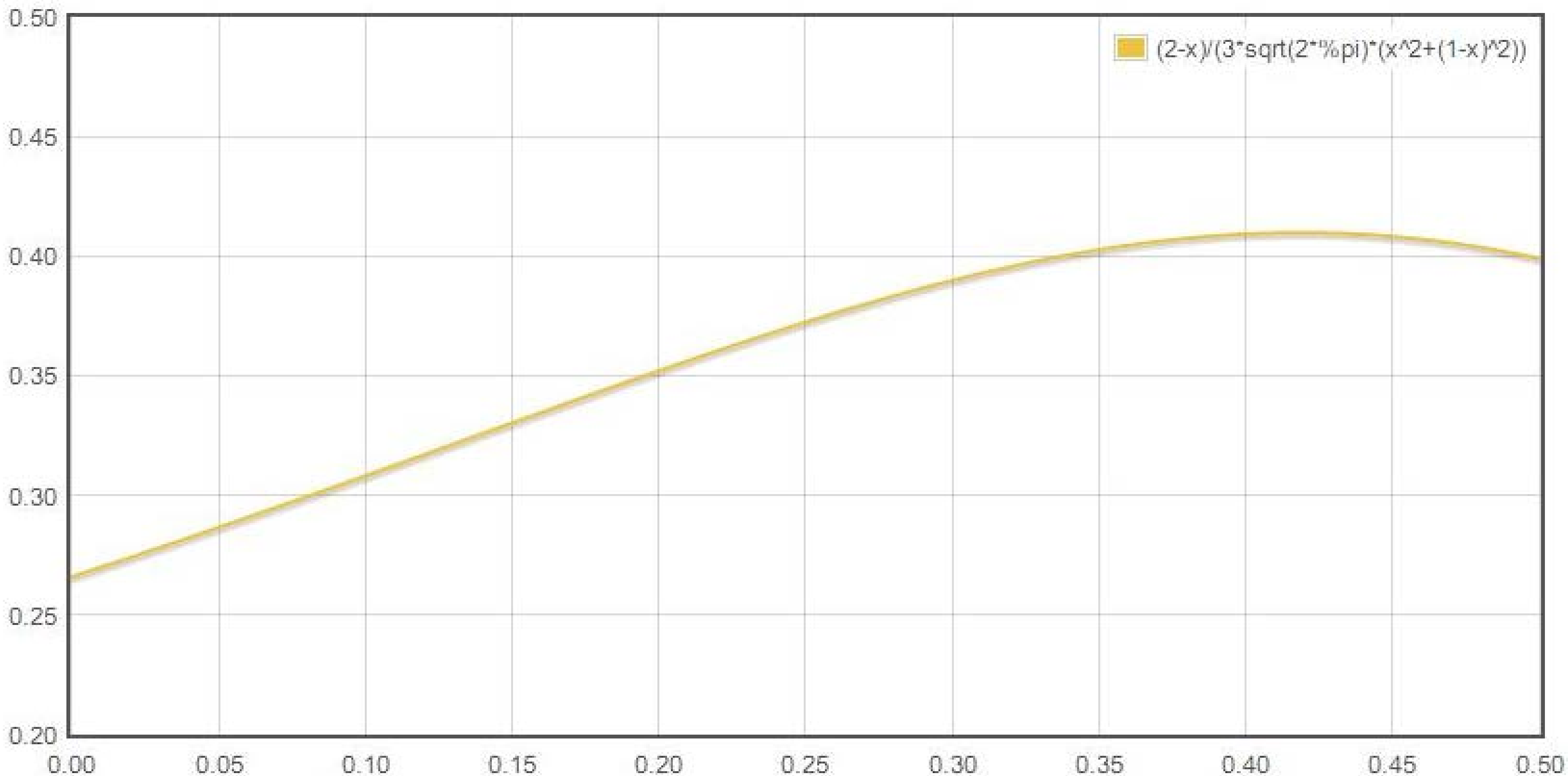
Отсюда следует, что

$$\frac{q-p+3}{6\beta_3\sqrt{2\pi pq}} = c_p \le c.$$

Для распределения Бернулли $\beta_3 = \frac{p^2+q^2}{\sqrt{pq}}$, откуда следует, что

$$c_p = \frac{q-p+3}{6\sqrt{2\pi}\,(p^2+q^2)} = \frac{2-p}{3\sqrt{2\pi}\,(p^2+(1-p)^2)}.$$

Это – нижняя оценка постоянной c в теореме Берри – Эссеена для распределения Бернулли с параметром p. Её максимум достигается при $p = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$.


0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0.35
0.40
0.45
0.50
(2-x)/(3*sqrt(2*%pi)*(x^2+(1-x)^2))

Вернёмся к равенству

$$F_n(x_n'+0)-G(x_n'+0)=\frac{q-p}{6\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{h}{2\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\frac{|\alpha_3|}{\sqrt{n}}+\frac{h}{2\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Из него видно, как формируется оценка $\rho(F_n,G)$ для распределений Бернулли: оценка равномерного расстояния есть сумма оценки

$$\max\left\{|F_n(x)-G(x)|: x\in D_n+\frac{h}{2\sqrt{n}}\right\}$$

и половины максимального скачка функции $F_n(x)$. Для распределения Эссеена вторая величина в 18.47 раз больше первой.

Результаты Г. Крамера и Я. В. Успенского были улучшены К.-Г. Эссееном в 1945 г., который для результата Г. Крамера ослабил условие гладкости до его естественной границы, до условия нерешетчатости распределения P. Он показал также, что результат Я. В. Успенского остаётся справедливым для всех действительных x, если в правую часть равенства добавить слагаемое, которое компенсирует возрастание нормальной функции распределения $G(x)$ на интервалах постоянства функции $F_n(x)$. Явных оценок остаточных частей разложений у К.-Г. Эссеена не было.

«… задача выделения достаточно широкого класса распределений, для которых гарантированная точность нормальной аппроксимации и ее уточнений соответствует фактически наблюдаемой, все еще остается нерешенной.»

Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов, Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы., М., 1967, стр. 232.

Далее нас интересуют оценки в локальной форме ЦПТ для плотностей. Мы будем использовать условие гладкости распределения P

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty ,$$

где $f(t)$ – характеристическая функция распределения P, ν – некоторое положительное число. Выполнение этого условия гарантирует существование непрерывных и ограниченных плотностей $p_n(x) = F_n'(x)$ для $n \geq \nu$, и справедливость соотношения

$$p_n(x) \to \varphi(x), n \to \infty, -\infty < x < \infty.$$

Нам понадобятся многочлены Чебышева – Эрмита $H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, в частности, $H_0(x) \equiv 1, H_1(x) = x, H_2(x) = x^2 - 1, H_3(x) = x^3 - 3x, H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x, H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15.$

Для распределений P с конечным шестым моментом

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{A_1(x)}{\sqrt{n}}\varphi(x) + \frac{A_2(x)}{n}\varphi(x) + \frac{A_3(x)}{n^{3/2}}\varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty,$$

где

$$A_1(x) = \frac{\theta_3}{3!}H_3(x), \qquad A_2(x) = \frac{\theta_4}{4!}H_4(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^2 H_6(x),$$

$$A_3(x) = \frac{\theta_5}{5!}H_5(x) + \frac{\theta_3}{3!}\frac{\theta_4}{4!}H_7(x) + \frac{1}{6}\left(\frac{\theta_3}{3!}\right)^3 H_9(x).$$

Здесь $\theta_l = \int_{-\infty}^{\infty} H_l(x)P(dx)$ – числа, которые мы называем моментами Чебышева – Эрмита распределения P, в частности, $\theta_3 = \alpha_3, \theta_4 = \alpha_4 - 3, \theta_5 = \alpha_5 - 10\alpha_3$.

Отсюда следует, что

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{A_1(x)}{\sqrt{n}}\varphi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty, \qquad (1)$$

$$p_n(x) - \varphi(x) - \frac{A_1(x)}{\sqrt{n}}\varphi(x) = \frac{A_2(x)}{n}\varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), n \to \infty, \qquad (2)$$

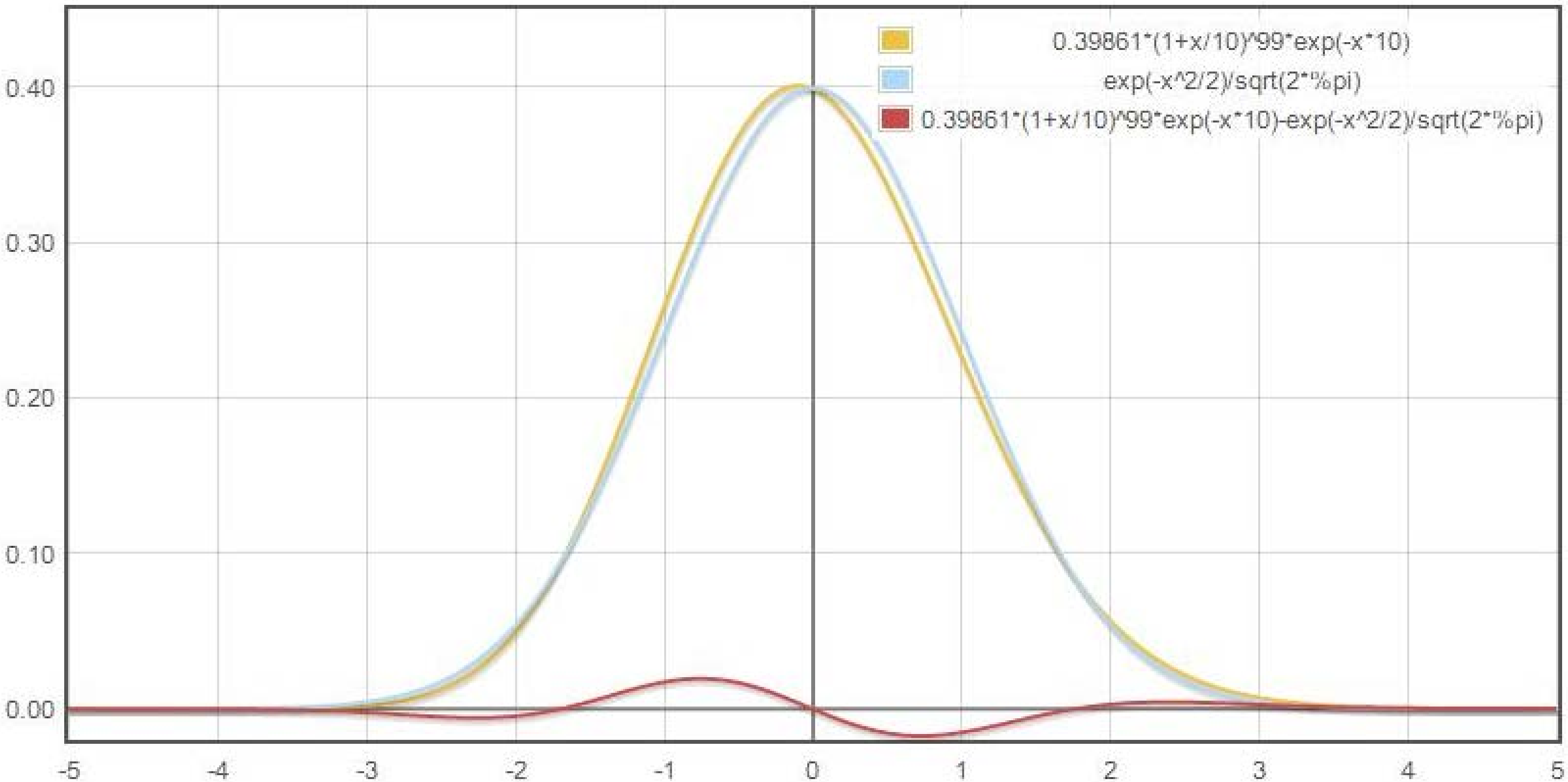
$$p_n(x) - \varphi(x) - \left(\frac{A_1(x)}{\sqrt{n}}\varphi(x) + \frac{A_2(x)}{n}\varphi(x)\right) = \frac{A_3(x)}{n^{3/2}}\varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty. \qquad (3)$$

Для иллюстраций мы будем использовать распределение P, которое является центрированным экспоненциальным распределением с параметром 1, т. е. распределением с плотностью

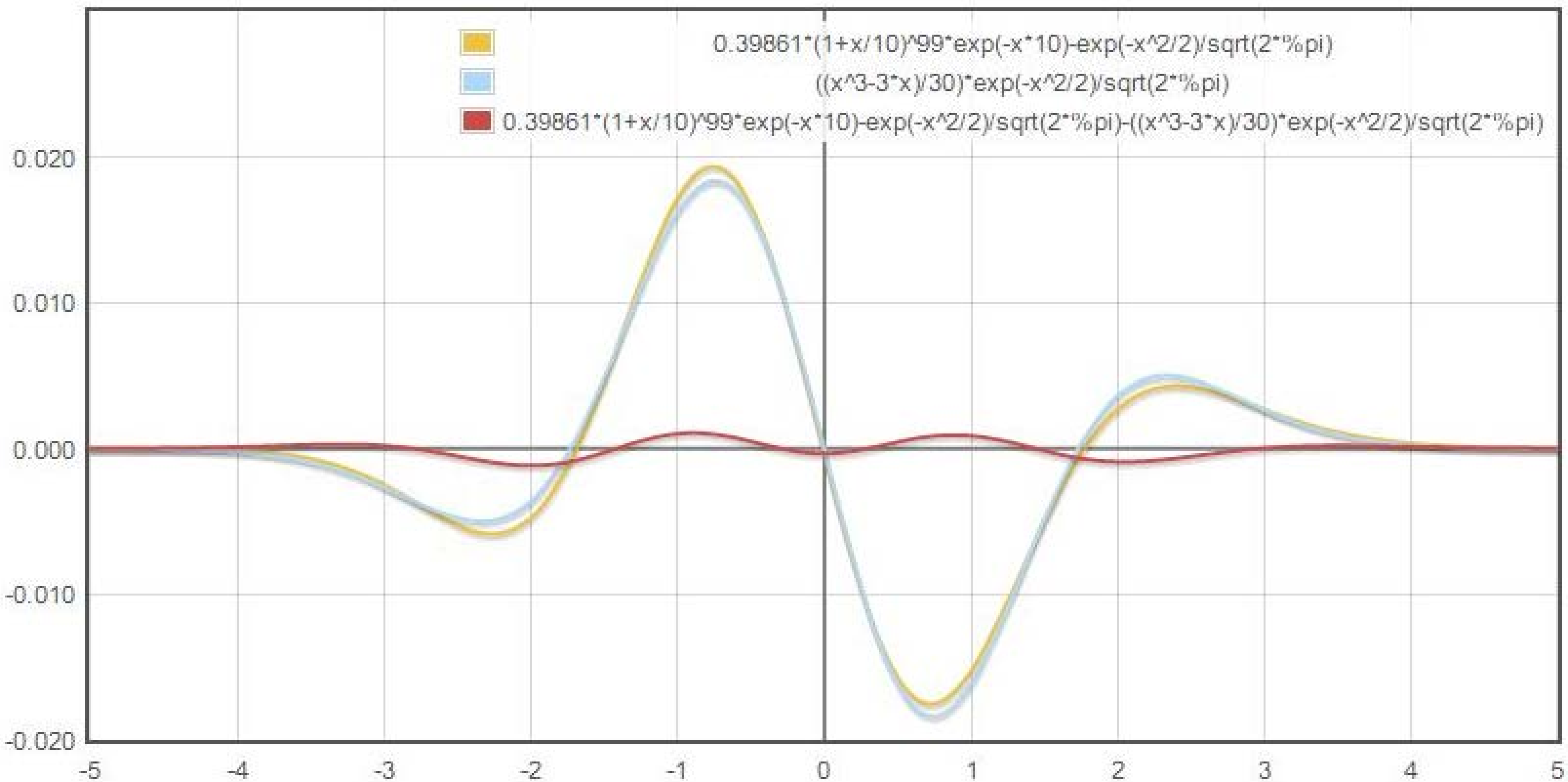
$$p(x) = 0, x < -1, \text{ и } p(x) = e^{-(x+1)}, x \geq -1.$$

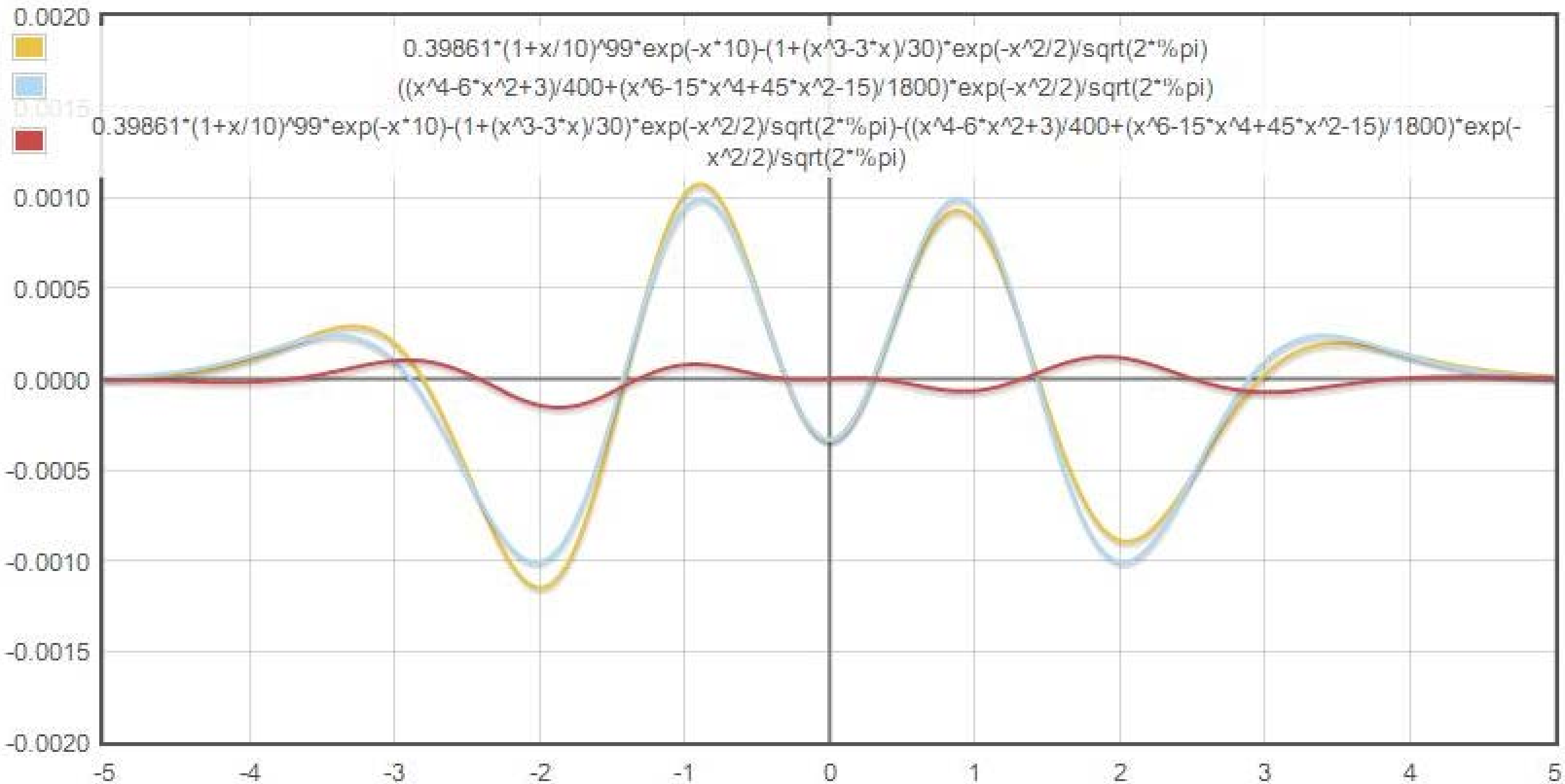
Оно имеет нулевое среднее, единичную дисперсию, для него $\alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 9, \alpha_5 = 44, \alpha_6 = 265$. Его моменты $\alpha_k \sim k!/e$ очень быстро возрастают при росте k, кроме того оно очень асимметрично в том смысле, что $\alpha_k \sim \beta_k$ для нечётных k. Для этого распределения

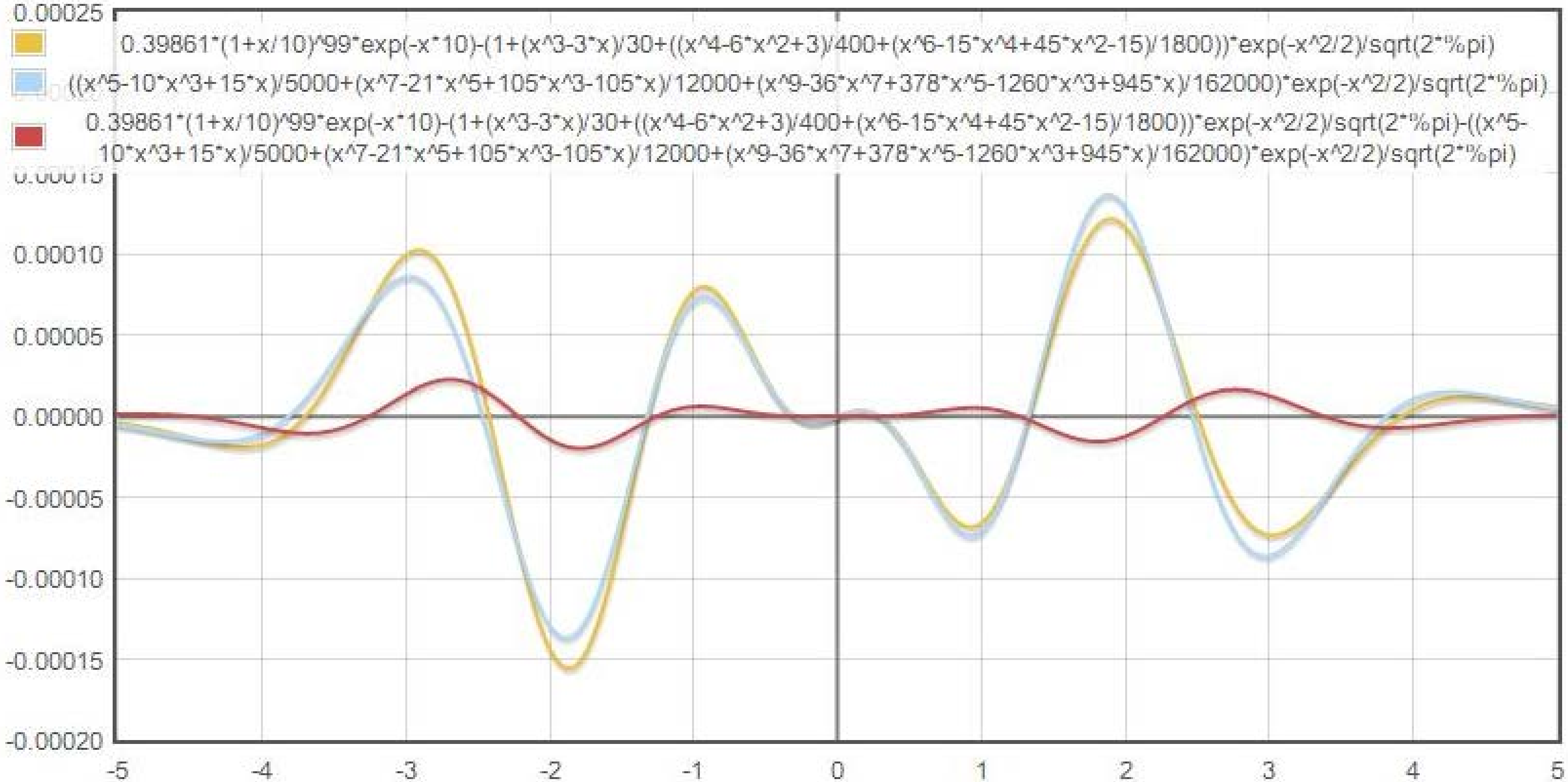
$$p_n(x) = \sqrt{n}\frac{n^n}{n!\,e^n}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-x\sqrt{n}}, \qquad x \geq -\sqrt{n}.$$

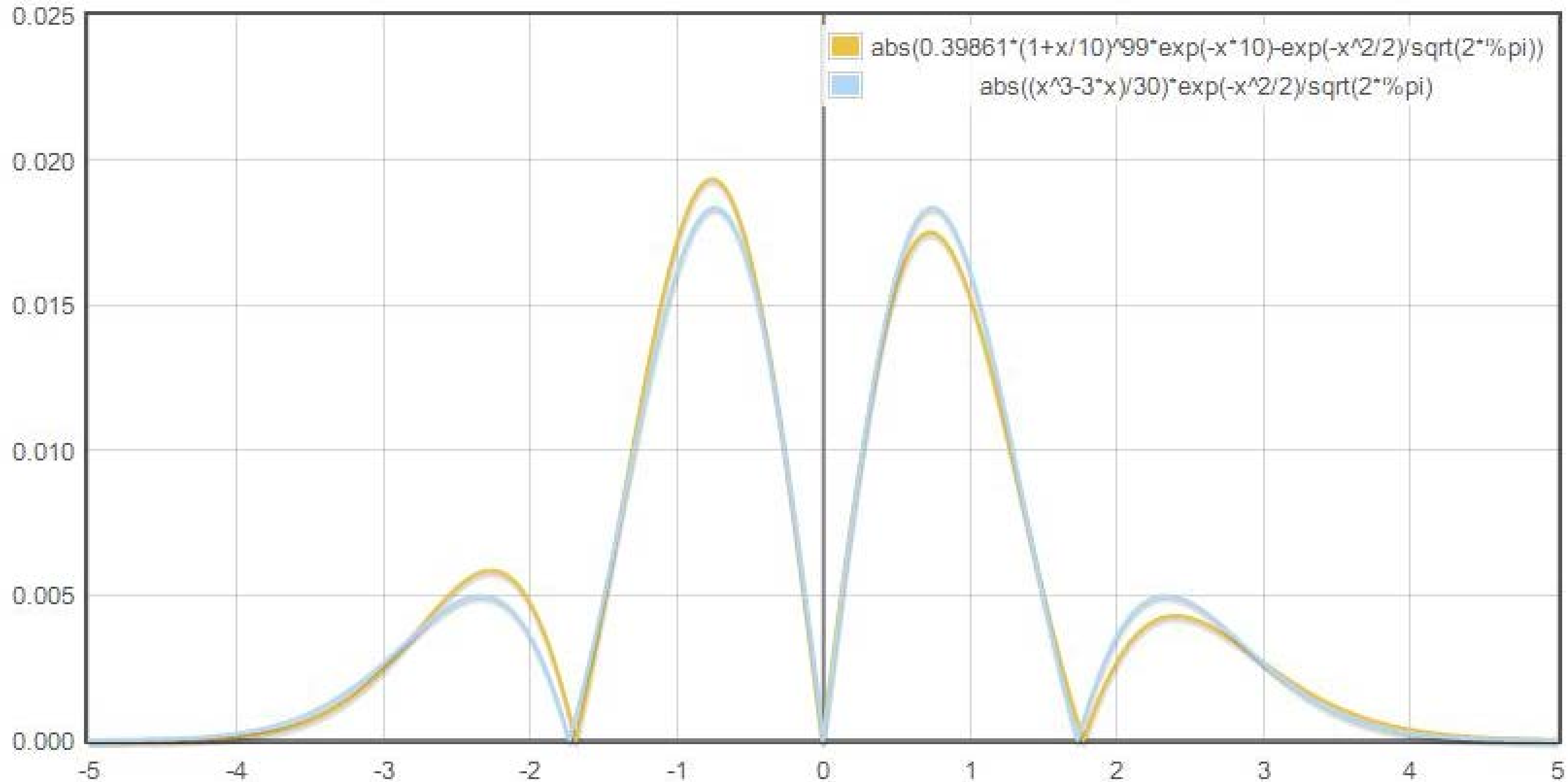


0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)
exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

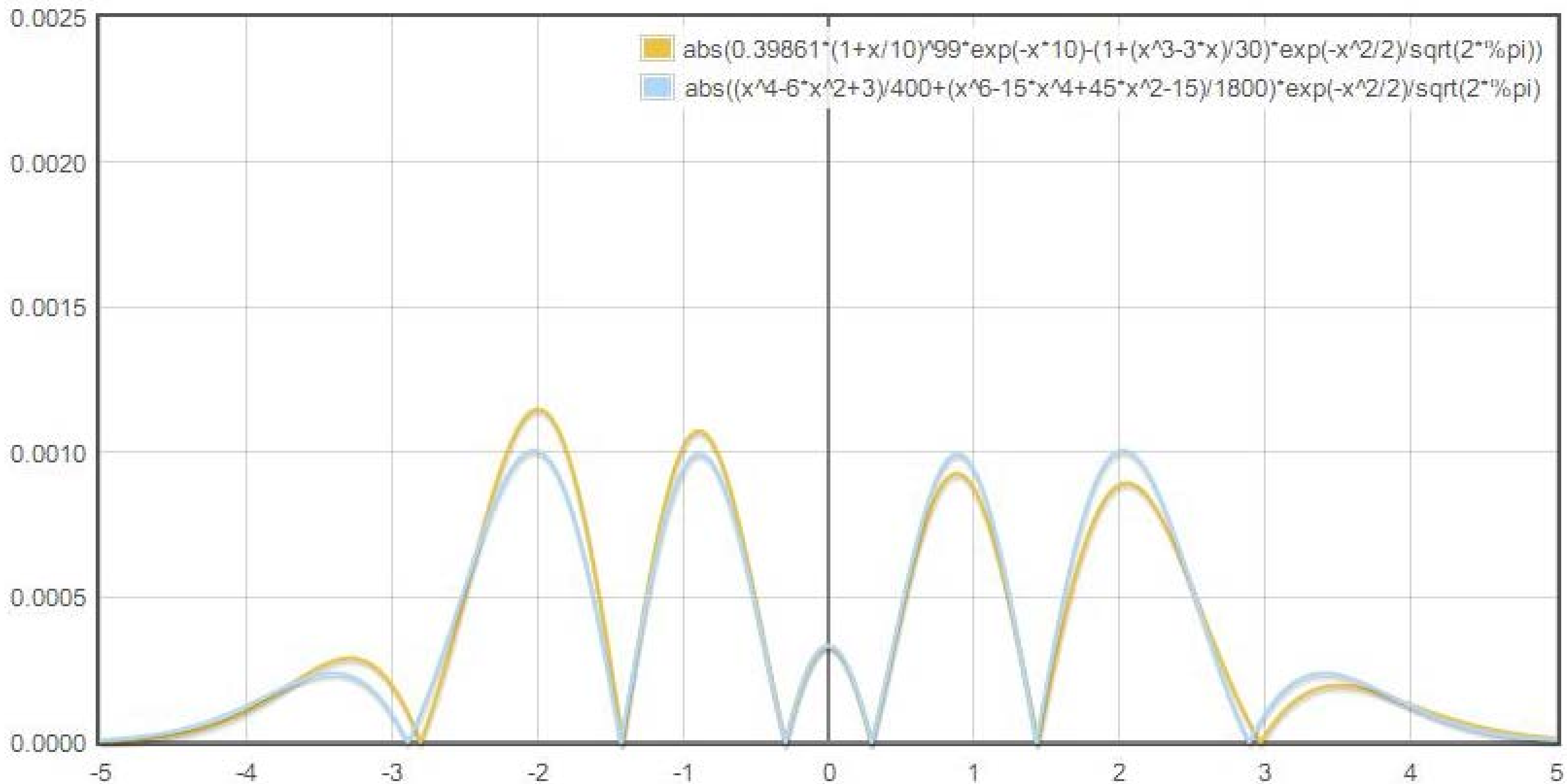

0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
((x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)-((x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.020
0.010
0.000
-0.010
-0.020
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
((x^4-6*x^2+3)/400+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)-((x^4-6*x^2+3)/400+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
-0.0005
-0.0010
-0.0015
-0.0020
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

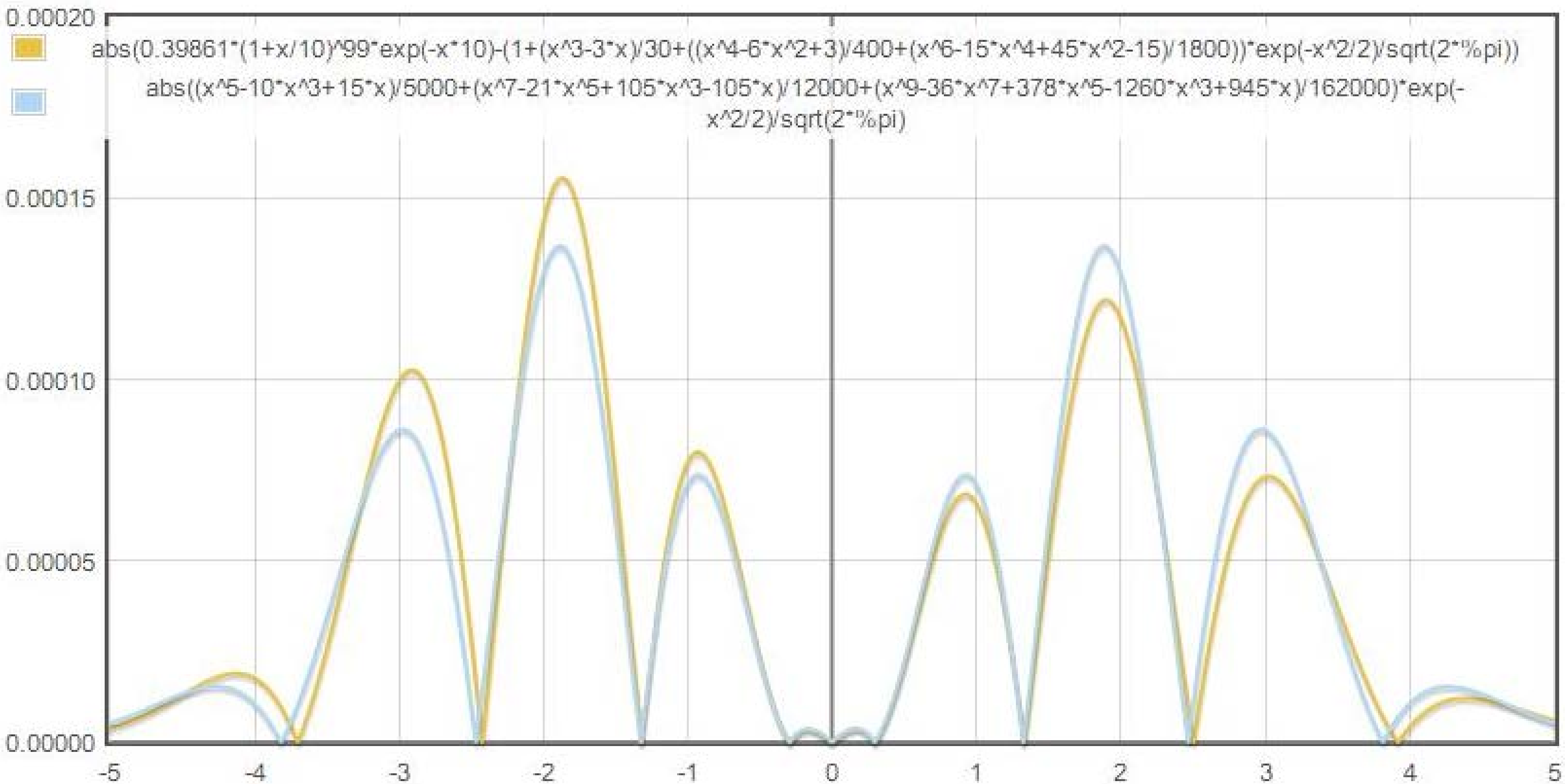

0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30+((x^4-6*x^2+3)/400+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800))*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
((x^5-10*x^3+15*x)/5000+(x^7-21*x^5+105*x^3-105*x)/12000+(x^9-36*x^7+378*x^5-1260*x^3+945*x)/162000)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30+((x^4-6*x^2+3)/400+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800))*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)-((x^5-10*x^3+15*x)/5000+(x^7-21*x^5+105*x^3-105*x)/12000+(x^9-36*x^7+378*x^5-1260*x^3+945*x)/162000)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.00025
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
-0.00005
-0.00010
-0.00015
-0.00020
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5



abs(0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi))
abs((x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5



abs(0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi))
abs((x^4-6*x^2+3)/400+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.0025
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


abs(0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30+((x^4-6*x^2+3)/400+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800))*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi))
abs((x^5-10*x^3+15*x)/5000+(x^7-21*x^5+105*x^3-105*x)/12000+(x^9-36*x^7+378*x^5-1260*x^3+945*x)/162000)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.00020
0.00015
0.00010
0.00005
0.00000
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Справедливы оценки: для распределений P с конечным четвёртым моментом

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{|A_1(x)|}{\sqrt{n}}\varphi(x) + O_1\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$

для распределений P с конечным пятым моментом

$$\left|p_n(x) - \varphi(x) - \frac{A_1(x)}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right| \le \frac{|A_2(x)|}{n}\varphi(x) + O_2\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), n \to \infty,$$

для распределений P с конечным шестым моментом

$$\left|p_n(x) - \varphi(x) - \left(\frac{A_1(x)}{\sqrt{n}}\varphi(x) + \frac{A_2(x)}{n}\varphi(x)\right)\right| \le \frac{|A_3(x)|}{n^{3/2}}\varphi(x) + O_3\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty.$$

$$O_1\left(\frac{1}{n}\right) \leq 0.03\frac{\beta_4}{n} + \frac{|A_2^*(x)|\varphi(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \qquad n \to \infty,$$

$$O_2\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \leq 0.0124\frac{\beta_5}{n^{3/2}} + \frac{|A_3^*(x)|\varphi(x)}{n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad n \to \infty,$$

$$O_3\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq 0.0048\frac{\beta_6}{n^2} + \frac{|A_4^*(x)|\varphi(x)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right), \qquad n \to \infty,$$

где

$$A_2^*(x) = H_4(x)/40 + H_6(x)/18, \;\; A_3^*(x) = -H_5(x)/72 + H_7(x)/12 + H_9(x)/162,$$

$$A_4^*(x) = -0.043651H_6(x) + (1/15 + 1/32)H_8(x) + H_{10}(x)/72 + H_{12}(x)/1944.$$

Обсудим оценку

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{|A_1(x)|}{\sqrt{n}}\varphi(x) + O_1\left(\frac{1}{n}\right), n \to \infty,$$

и приведём явный вид слагаемых, которые убывают в точности как $1/n$.

Для распределений P с конечным четвёртым моментом

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} H_3\varphi(x) + \frac{\alpha_4 - 3}{4!\,n} H_4(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\right)^2 H_6(x)\varphi(x) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Аналог этого разложения

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x)\varphi(x) + \frac{\lambda\alpha_4 - 3}{4!\,n} H_4(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\right)^2 H_6(x)\varphi(x) + R,$$

где $0 \le \lambda \le 1$ – параметр, выбор которого находится в нашем распоряжении, а

$$|R| \le q(\lambda)\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\frac{\beta_4}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),\ \ n \to \infty,$$

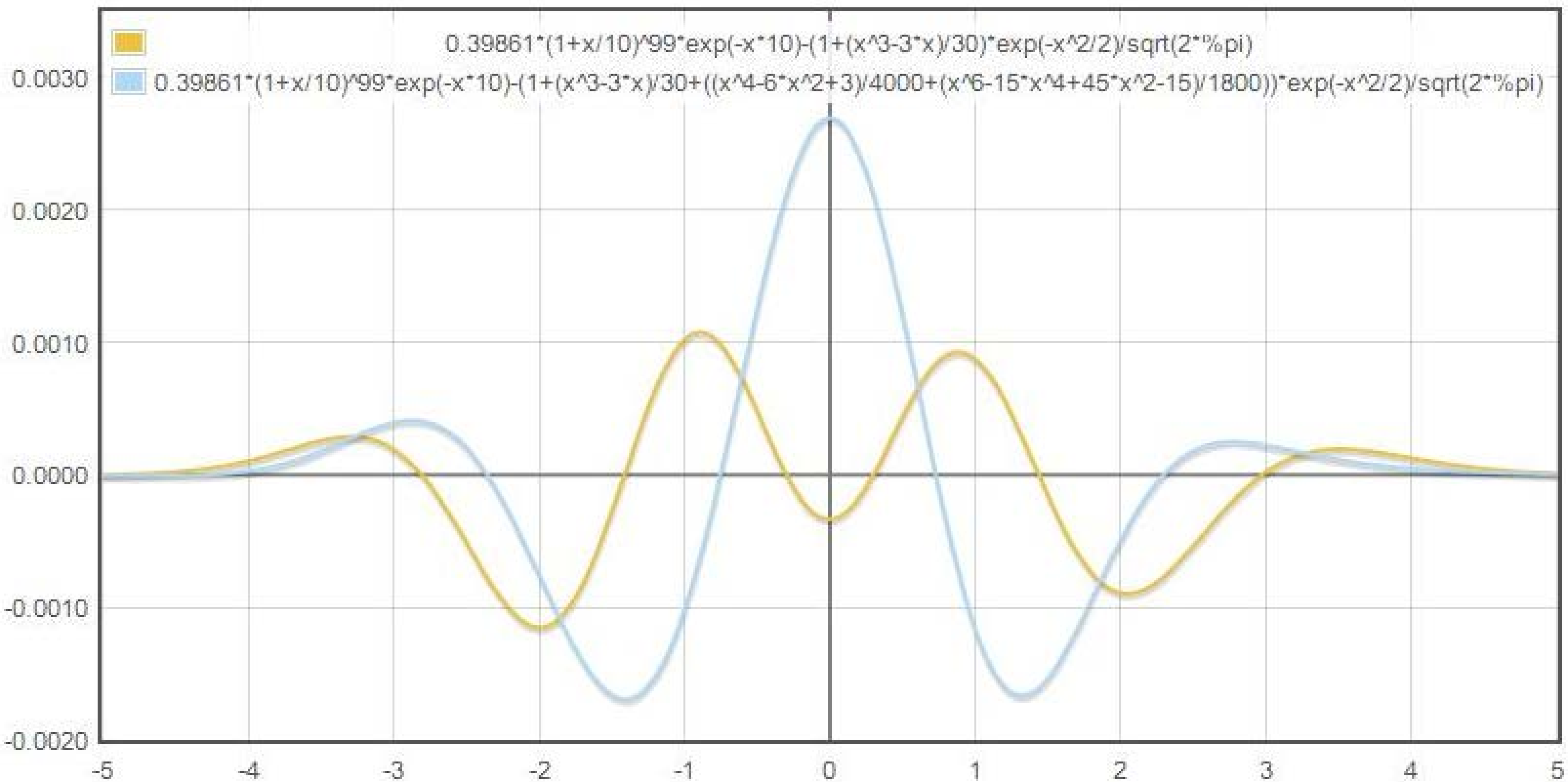
$$q(\lambda) = sup_{u>0} \frac{\left|e^{iu} - \left(1 + iu + \frac{(iu)^2}{2} + \frac{(iu)^3}{3!} + \lambda\frac{(iu)^4}{4!}\right)\right|}{u^4/4!}.$$

При $0 \le \lambda \le 0.4$ справедливо равенство $\lambda + q_4(\lambda) = 1$ и из последнего разложения следует, что при этих λ

$$\left| p_n(x) - \varphi(x) - \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x)\varphi(x) + \frac{\lambda\alpha_4 - 3}{4!\,n} H_4(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{3!\,\sqrt{n}}\right)^2 H_6(x)\varphi(x) \right) \right| \le$$

$$\le \frac{1-\lambda}{8\sqrt{2\pi}}\frac{\beta_4}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

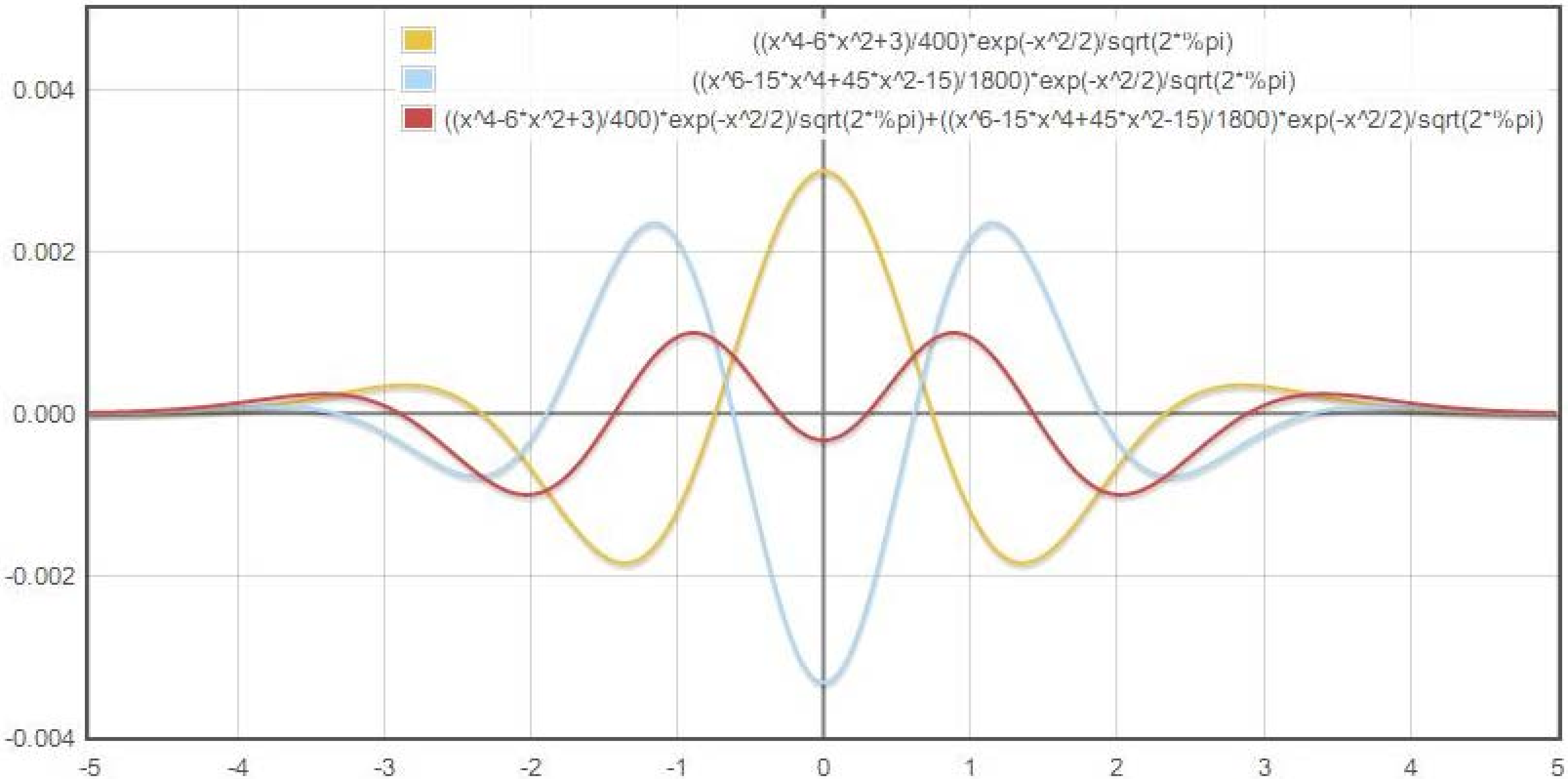
Для любого распределения P с конечным четвёртым моментом правая часть этой оценки эквивалентна левой части при $x = 0$. Возьмём $\lambda = 0.4$. Оказывается, что сумма трёх слагаемых под знаком модуля аппроксимирует $p_n(x) - \varphi(x)$ хуже, чем первое слагаемое.


0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30+((x^4-6*x^2+3)/4000+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800))*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.0030
0.0020
0.0010
0.0000
-0.0010
-0.0020
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

«Нерегулярность» асимптотических разложений связана с тем, что все члены разложений, начиная со второго, являются суммами нескольких слагаемых. Добавляя к предыдущему разложению новую сумму «целиком», мы (как правило) улучшаем точность аппроксимации. Добавляя к предыдущему разложению слагаемые из следующего члена разложения поодиночке, мы можем столкнуться с ухудшением точности аппроксимации. Рассмотрим сумму

$$\frac{\alpha_4 - 3}{4!\,n} H_4(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\right)^2 H_6(x)\varphi(x).$$

Для ЭР при $n = 100$ и $x = 0$ первое слагаемое равно $2.992 \cdot 10^{-3}$, второе равно $-3.3245 \cdot 10^{-3}$, их сумма равна $-3.325 \cdot 10^{-4}$.


((x^4-6*x^2+3)/400)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
((x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
((x^4-6*x^2+3)/400)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)+((x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.004
0.002
0.000
-0.002
-0.004
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Перепишем разложение

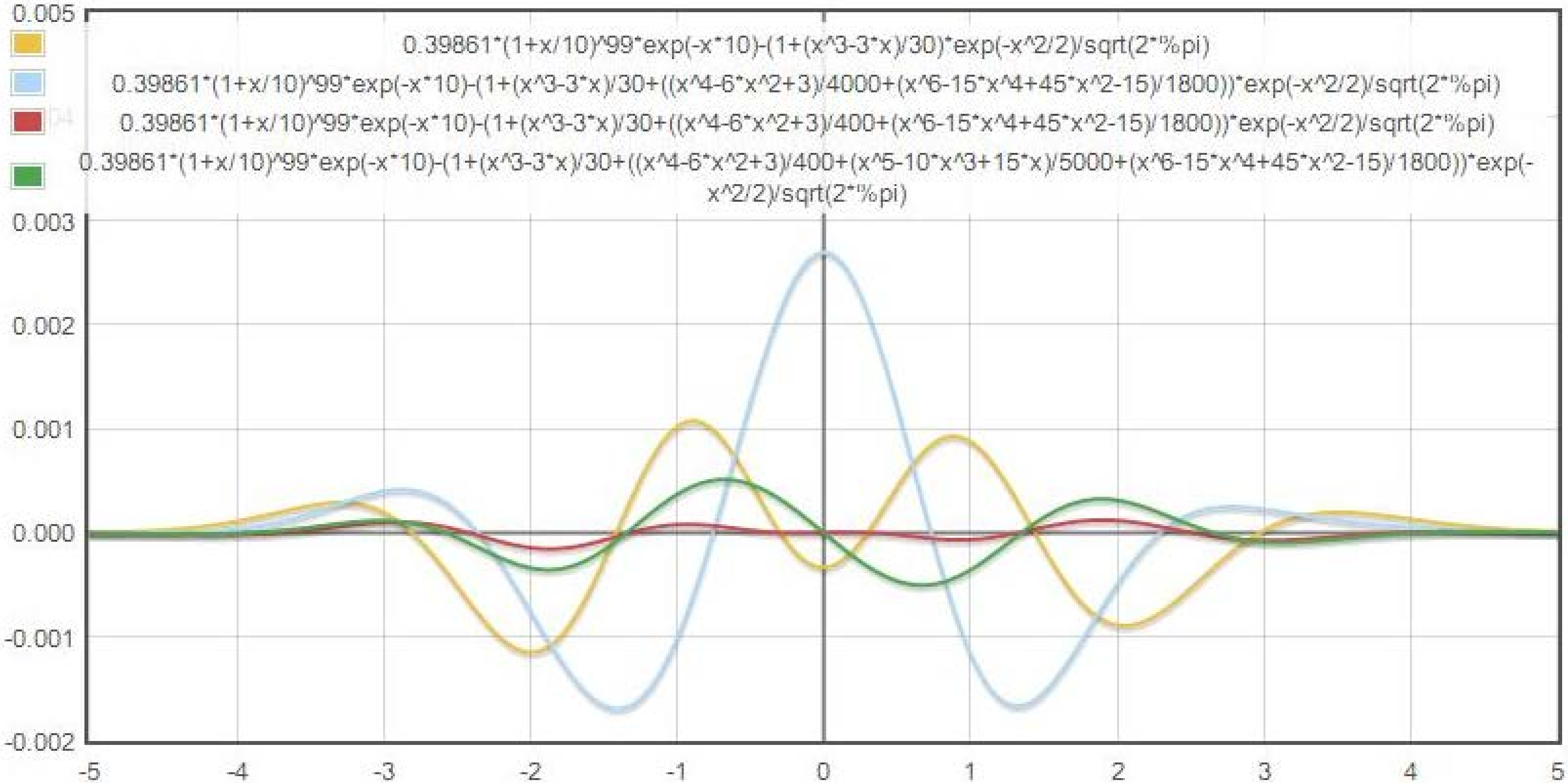
$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{A_1(x)}{\sqrt{n}}\varphi(x) + \frac{A_2(x)}{n}\varphi(x) + \frac{A_3(x)}{n^{3/2}}\varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty,$$

в виде

$$p_n(x) - \varphi(x) = \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}H_3(x)\varphi(x) + \frac{\theta_4}{4!\,n}H_4(x)\varphi(x) + \frac{\theta_5}{5!\,n^{3/2}}H_5(x)\varphi(x) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}\right)^2 H_6(x)\varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}\frac{\theta_4}{4!\,n}H_7(x)\varphi(x) + \frac{1}{6}\left(\frac{\theta_3}{3!\sqrt{n}}\right)^3 H_9(x)\varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to \infty,$$

и попробуем вычитать из левой части слагаемые правой части поодиночке.


0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30+((x^4-6*x^2+3)/4000+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800))*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30+((x^4-6*x^2+3)/400+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800))*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-(1+(x^3-3*x)/30+((x^4-6*x^2+3)/400+(x^5-10*x^3+15*x)/5000+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800))*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)
0.005
0.003
0.002
0.001
0.000
-0.001
-0.002
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Понятно, как можно обойти «нерегулярность»: новые члены разложения нужно добавлять «целиком». Но, если мы имеем информацию только о четвёртом моменте, добавить второй член «целиком» мы сможем, только сильно загрубляя оценку остаточной части. Вернёмся к неравенству

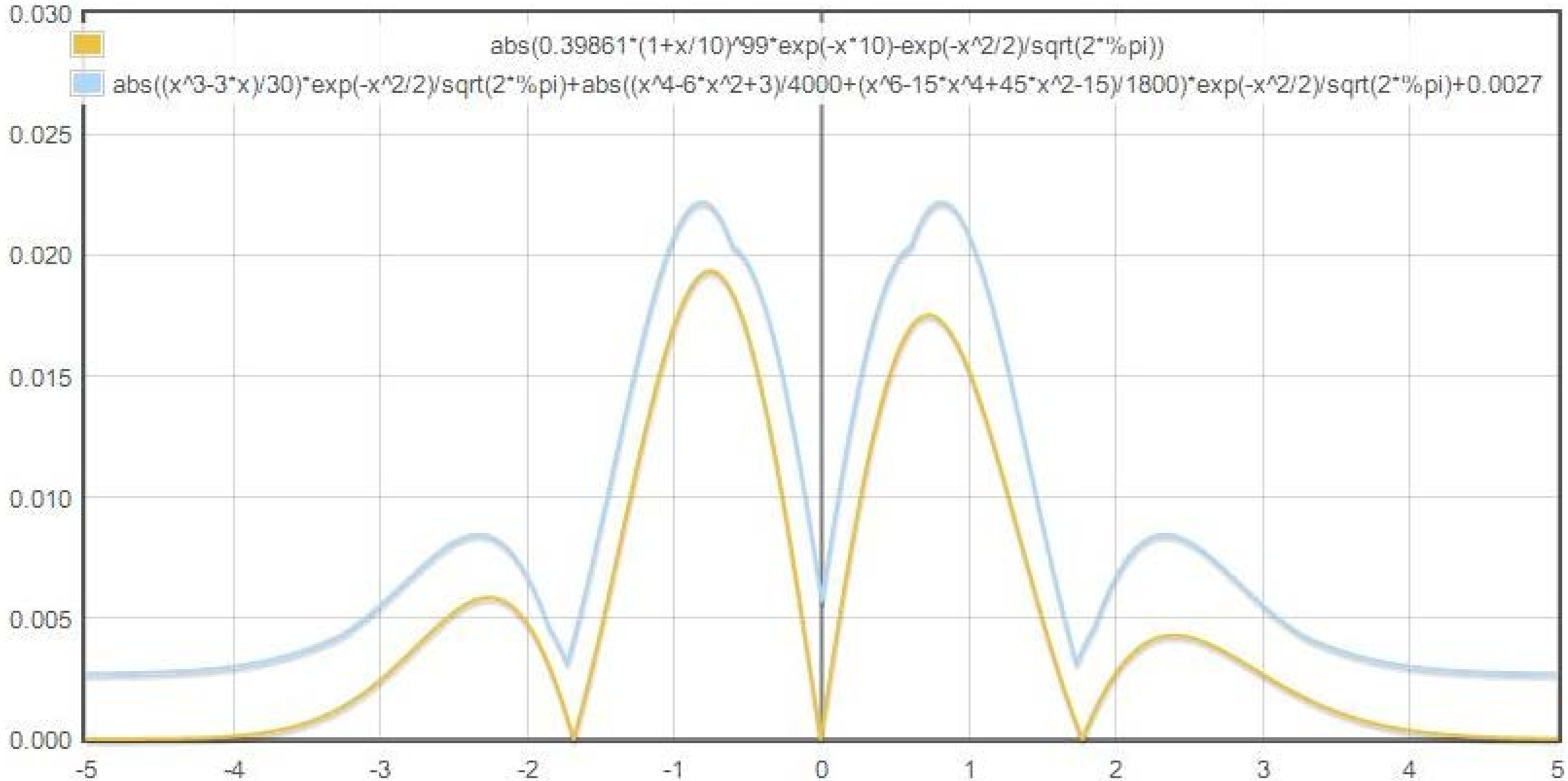
$$\left|p_n(x) - \varphi(x) - \left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} H_3(x)\varphi(x) + \frac{\lambda\alpha_4 - 3}{4!\, n} H_4(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\right)^2 H_6(x)\varphi(x)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1-\lambda}{8\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_4}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

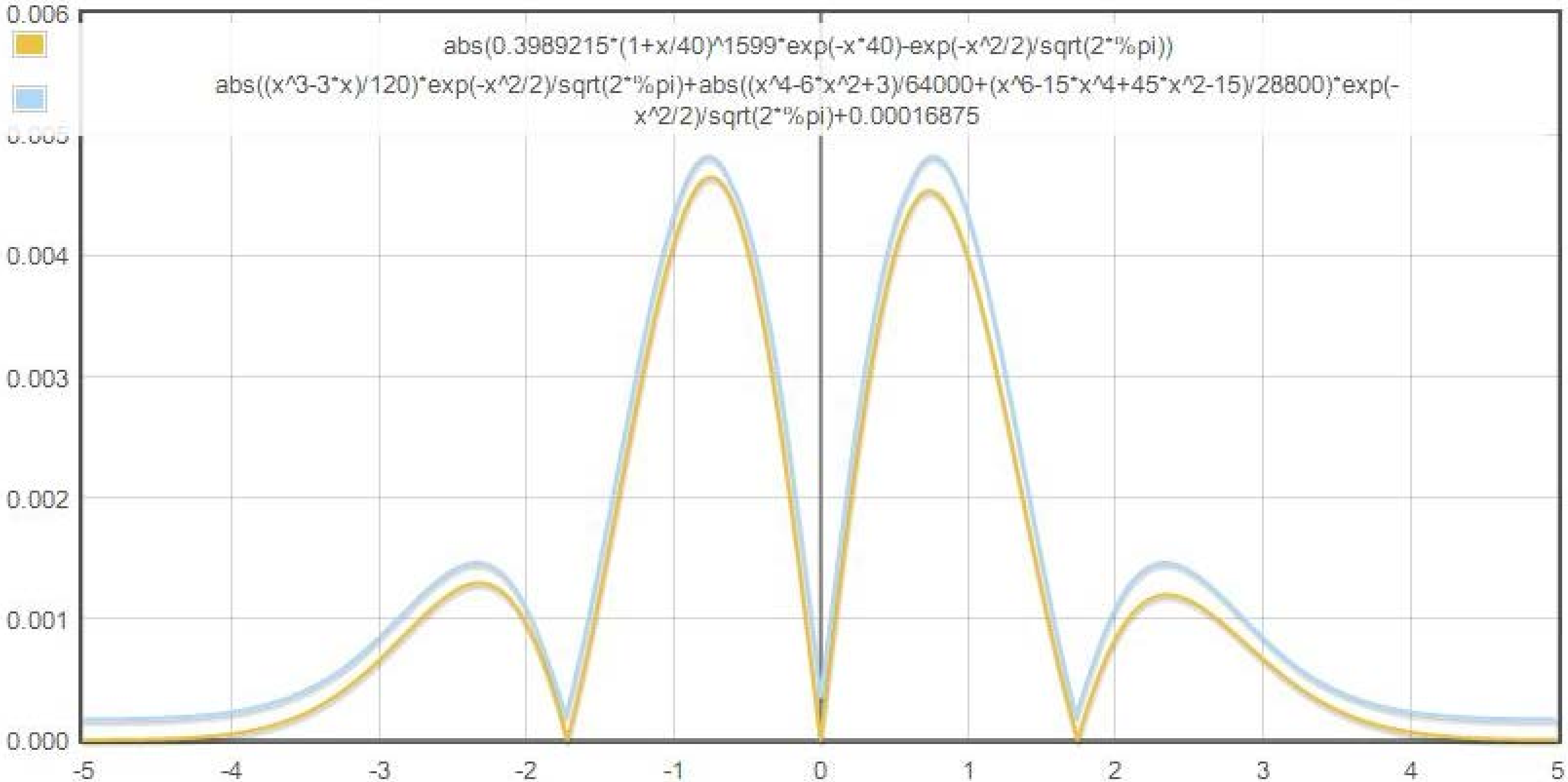
где $0 \le \lambda \le 0.4$. Следствием этого неравенства при $\lambda = 0.4$ является неравенство

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{|A_1(x)|}{\sqrt{n}} \varphi(x) + 0.03 \frac{\beta_4}{n} + \frac{1}{n} \left| \frac{0.4\alpha_4 - 3}{4!} H_4(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_3}{3!}\right)^2 H_6(x) \right| \varphi(x)$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$



0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
abs(0.39861*(1+x/10)^99*exp(-x*10)-exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi))
abs((x^3-3*x)/30)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)+abs((x^4-6*x^2+3)/4000+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/1800)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)+0.0027
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5



abs(0.3989215*(1+x/40)^1599*exp(-x*40)-exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi))
abs((x^3-3*x)/120)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)+abs((x^4-6*x^2+3)/64000+(x^6-15*x^4+45*x^2-15)/28800)*exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi)+0.00016875
0.006
0.004
0.003
0.002
0.001
0.000
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5