Слабо локализуемые главные подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси

Н. Ф. Абузярова

Башкирский государственный университет

Пусть $[a_1; b_1] \Subset [a_2; b_2] \Subset \cdots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{P}(a; b)$ индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\{P_k\}$, каждое из которых состоит из всех целых функций φ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \qquad y^{\pm} = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Пространство $\mathcal{P}(a; b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$).

Для замкнутого подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ положим $c_{\mathcal{J}} = \inf_{\psi\in\mathcal{J}} c_\psi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup_{\psi\in\mathcal{J}} d_\psi$, где $\mathrm{i}\,[c_\psi; d_\psi]$ – индикаторная диаграмма функции ψ. Множество $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$ – *индикаторный отрезок* подмодуля $\mathcal{J}$. *Дивизор* n_ψ *функции* $\psi \in \mathcal{P}(a; b)$:

$$n_\psi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если } \lambda \text{ – нуль } \psi \text{ кратности } m. \end{cases}$$

Дивизор подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ определяется как $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min_{\psi\in\mathcal{J}} n_\psi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит все функции $\psi \in \mathcal{P}(a; b)$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\psi(z) \geqslant n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции ψ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$ обозначим через $\mathcal{J}_\varphi$ *главный подмодуль*, порожденный этой функцией, т.е. замыкание в $\mathcal{P}(a; b)$ множества $\{p\varphi : p \in \mathbb{C}[z]\}$, $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$. Обозначение $\mathcal{J}(\varphi)$ будем использовать для слабо локализуемого подмодуля с дивизором, равным n_φ и индикаторным отрезком, равным $[c_\varphi; d_\varphi]$. Легко проверить, что $\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{J}(\varphi)$. Равенство $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$ эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ и, как показывает пример, построенный в работе [1], не всегда справедливо.

Здесь мы приводим одно достаточное условие слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ для случая, когда множество $\mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi : p \in \mathbb{C}[z]\}$ не пусто.

Теорема. *Пусть образующая подмодуля имеет вид* $\varphi = \Phi/\omega$, *где* $\Phi \in \mathcal{P}(a; b)$ *– функция типа синуса,* ω *– целая функция нулевого порядка и сильно регулярного роста (см. [2]) с дивизором* n_ω, *удовлетворяющим условию: для некоторых положительных постоянных* C_0 *и* r_0 *справедливо неравенство*

$$n_\omega(r) \ln r < C_0 \int_0^r \frac{n_\omega(t)\,\mathrm{d}\,t}{t}, \quad r > r_0.$$

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ *слабо локализуем.*

Работа выполнена при поддержке гранта №01201456408 Минобрнауки РФ.

Список литературы

[1] A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov, *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation.*, arXiv: 1309.6968v2.

[2] Н. В. Заболоцкий, "Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка", *Матем. заметки*, **63**:2 (1998), 196–208.