Весовые оценки для одного класса субаддитивных операторов и их приложения

А. М. Абылаева[a], А. О. Байарыстанов[a], А. А. Калыбай[a,b], Р. Ойнаров[a]

[a] *Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева*

[b] *Университет КИМЕП*

Пусть $1 \leqslant r, p, q \leqslant \infty$, u, w и v-весовые т.е. неотрицательные измеримые на $I = (0, \infty)$ функции.

Установливаются необходимые и достаточные условия выполнения неравенства

$$\|uTf\|_q \leqslant C\|vf\|_p, \qquad f \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_p$ – обычная норма $L_p(I)$, а оператор T один из операторов

$$T^-_{r,\mu} f(x) = \left(\int_0^x \left(\frac{w(s)}{(x-s)^\mu} \int_s^x f(t)\,dt \right)^r ds \right)^{\frac{1}{r}}, \qquad x \in I$$

или

$$T^+_{r,\mu} f(x) = \left(\int_x^\infty \left(\frac{w(s)}{(s-x)^\mu} \int_x^s f(t)\,dt \right)^r ds \right)^{\frac{1}{r}}, \qquad x \in I, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

В случае $r = 1$ операторы $T^-_{r,\mu}$, $T^+_{r,\mu}$ становятся линейными и, например, действие оператора $T^-_{1,\mu}$ для функции $f \geqslant 0$ имеет вид

$$T^-_{1,\mu} f(x) = \int_0^x f(t) \int_0^t \frac{w(s)}{(x-s)^\mu}\,ds\,dt, \qquad x \in I.$$

Откуда при $w(\cdot) \equiv 1$, $\mu = 1$ имеем

$$T^-_{1,1} f(x) = \int_0^x f(t) \ln \frac{x}{x-t}\,dt, \qquad x \in I,$$

для которого оценка в вида (1) при $v^p(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$ исследована в [1].

В случае $\mu = 0$ неравенство (1) для оператора $T^\pm_{r,0}$ исследовано в [2].

В случае $r = q$ одновременного выполнения неравенства (1) для операторов $T^-_{r,\mu}$ и $T^+_{r,\mu}$ эквивалентно выполнению неравенства

$$\left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{g(x) - g(s)}{(x-s)^\mu} \right|^q u^q(x) w^q(s)\,dx\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int_0^\infty v^p(t) |g'(t)|^p\,dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

для локально абсолютно непрерывных на I функций g.

Это неравенство в частном случае исследовано в [3, теорема 5.3], а в общем случае, как открытая задача поставлена в [4, с. 83].

Список литературы

[1] А. М. Абылаева, М. Ж. Омирбек, “Весовая оценка для интегрального оператора с логарифмической особенностью”, *Известия НАН РК, Серия физико-математическая*, 2005, № 1, 38–47.

[2] R. Oinarov, A. Kalybay, “Three-parameter weighted Hardy type inequalities”, *Banach J. Math. Anal.*, **2**:2 (2008), 85–93.

[3] A.Kufner, L.-E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Scientific, New Jersey, 2003.

[4] A. Kufner, L. Maligranda. L.-E. Persson, *The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results*, Vydavatelsky Servis Publishing House, Pilsen, 2007.