

# Геометрическое описание областей с максимальными константами Харди

Ф. Г. Авхадиев

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

Пусть  $d \geq 2$  — натуральное число,  $p \in [1, \infty)$  и  $s \in (1, \infty)$ ,  $\Omega \subset R^d$  — область, не совпадающая со всем пространством. Рассмотрим следующее неравенство Харди: для любой функции  $f \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla f(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} dx \geq c_p(s, \Omega) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta^s(x)} dx.$$

Здесь  $\delta(x)$  — расстояние от точки  $x$  до границы области, постоянная  $c_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$  выбрана оптимальной, т.е. определена однозначно как максимальная величина, допустимая в этом вариационном неравенстве.

Хорошо известно, что существуют области, для которых приведенное неравенство не является содержательным, т.е. существуют области для которых  $c_p(s, \Omega) = 0$  при  $1 < s \leq d$ . С другой стороны,  $c_p(s, \Omega) = (s-1)^p/p^p$  для любой выпуклой области  $\Omega \neq R^d$  при любых допустимых значениях параметров  $d$ ,  $p$  и  $s$ . Известно также, что  $c_p(s, \Omega) \leq (s-1)^p/p^p$  для любой области, граница которой содержит хотя бы одну “регулярную” граничную точку, в этом смысле константы Харди для выпуклых областей являются максимальными из возможных. Рядом авторов были найдены экзотические примеры невыпуклых областей, для которых константы Харди  $c_2(2, \Omega)$  также максимальны, т.е. равны  $1/4$ .

Нами обнаружены и геометрически описаны широкие семейства невыпуклых плоских и пространственных областей, в которых указанное неравенство Харди справедливо с этой максимальной константой  $(s-1)^p/p^p$ . Эти семейства существенно зависят от размерности области и параметров  $p \in [1, \infty)$  и  $s \in (1, \infty)$ . Отметим, что аналитической основой наших построений являются новые одномерные неравенства типа Харди со специальными весами и новые константы, связанные с этими неравенствами и гипергеометрическими функциями. В докладе будут приведены как опубликованные (см. список литературы), так и новые результаты автора, относящиеся к этой тематике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00351-а)

## Список литературы

- [1] Авхадиев Ф. Г., “Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна  $1/4$ ”, *Известия РАН. Сер. матем.*, **78**:5 (2014), 3–26.
- [2] Авхадиев Ф. Г., “ $L_p$  – неравенства типа Харди в областях,  $r$ -близких к выпуклым”, *Известия вузов. Матем.*, 2015, № 1, 84–88.