О неравенствах в суперрефлексивных пространствах Бесова

А. Н. Агаджанов

Институт проблем управления РАН

Среди банаховых пространств важное место занимают пространства Бесова [1], [2]. В настоящем докладе пространства Бесова рассматриваются с позиций теории суперрефлексивных банаховых пространств [3], [4]. Такой подход позволяет получить неравенства для норм в суперрефлексивных пространствах Бесова. Прежде чем переходить к описанию результатов данного доклада, приведем необходимые определения. Пусть задана пара банаховых пространств Xи Y. Зафиксируем натуральное n и рассмотрим совокупность всех n-мерных нормированных подпространств $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$. Между пространствами X_n и Y_n всегда можно установить изоморфизм, то есть линейное биективное и взаимно непрерывное соответствие. Мерой близости между X_n и Y_n принято считать дистанцию Банаха–Мазура $d(X_n, Y_n) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\|\}$, где нижняя грань берется по всем изоморфизмам T между X_n и Y_n.

Определение 1 [3], [4]. Пусть $\varepsilon > 0$. Нормированное пространство Y называется ε-финитно представимым в нормированном пространстве X, если для каждого конечномерного подпространства $Y_n \subset Y$ найдется подпространство той же размерности $X_n \subset X$ такое, что $d(X_n, Y_n) \leqslant 1 + \varepsilon$.

Определение 2 [3], [4]. Банахово пространство Y называется финитно представимым в банаховом пространстве X, если оно ε-финитно представимо при любом $\varepsilon > 0$.

Определение 3 [3], [4]. Банахово пространство X называется суперрефлексивным, если любое банахово пространство Y, финитно представимое в X, является рефлексивным. Проверить факт финитной представимости банахова пространства Y в банаховом пространстве Xдовольно часто является далеко не простой задачей. Вот почему особое место в теории суперрефлексивных банаховых пространств занимает Теорема Энфло [5]. Банахово пространство X с уперрефлексивно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих равносильных условий:

а) среди норм, эквивалентных на X, существует равномерно выпуклая норма;
б) среди норм, эквивалентных на X, существует равномерно гладкая норма.

Напомним определения равномерно выпуклой и равномерно гладкой норм в банаховых пространствах. Пусть $B_X = \{u \in X : \|u\|_X = 1\}$ — единичная сфера в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$. Модулем выпуклости этого пространства называют функцию

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left(1 - \frac{\|u - v\|_X}{2} : u, v \in B_X,\ \|u - v\|_X \geqslant \varepsilon\right),$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 2$. Банахово пространство X называется равномерно выпуклым, если $\delta_X(\varepsilon) > 0$ при $0 < \varepsilon \leqslant 2$. Модулем гладкости пространства X называется функция

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|u + \tau v\|_X + \|u - \tau v\|_X}{2} - 1 : u, v \in B_X\right\}.$$

Банахово пространство X называется равномерно гладким, если $\lim_{\tau \to 0^+} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$. Пусть $-\infty < s < +\infty$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$.

Определение 4 [1], [2]. Пространством Бесова $B^s_{p,\,q}(R^n)$ назовем банахово пространство вида

$$(B^s_{p,q}(R^n), \|u\|_{p,q,s}) = \left\{ u \in S'(R^n) : \|u\|_{p,q,s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jqs} \|u * \varphi_j\|^q_{L_p(R^n)} \right)^{1/q} < +\infty \right\},$$

где $S'(R)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций, а $\{\varphi_j\}$ — специально выбранная система функций (способ построения таких функций приведен, например, в [2]). Норму $\|\cdot\|_{p,\,q,\,s}$ в дальнейшем будем называть канонической.

Прежде чем сформулировать основную Теорему доклада, приведем необходимые факты, связанные с неравенством Кларксона–Боаса [6]. Пусть X — банахово пространство. Будем говорить, что на X выполняется неравенство Кларксона–Боаса, если для любых элементов $u,\, v \in X$ справедливо неравенство

$$(\|u+v\|^r_X + \|u-v\|^r_X)^{1/r} \leqslant 2^{1/t'} \left(\|u\|^t_X + \|v\|^t_X \right)^{1/t},$$

где $r,\, t,\, t'$ — некоторые константы, причем $1 < r,\, t' < \infty$ и $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$. Имеет место

Теорема. *Пространства Бесова $(B^s_{p,q}(R^n), \|u\|_{p,\,q,\,s})$ являются равномерно выпуклыми и равномерно гладкими банаховыми пространствами. В этих пространствах выполняются неравенства Кларксона–Боаса, а для модулей выпуклости $\delta_{p,q,s}(\varepsilon)$ и модулей гладкости $\rho_{p,q,s}(\tau)$ канонической нормы $\|\cdot\|_{p,q,s}$ имеют место следующие соотношения:*

а) $$\left(\|u+v\|^q_{p,q,s} + \|u-v\|^q_{p,q,s} \right)^{1/q} \leqslant 2^{1/q} \left(\|u\|^{q'}_{p,q,s} + \|v\|^{q'}_{p,q,s} \right)^{1/q'},$$
$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q)^{1/q}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q'})^{1/q'} - 1,$$

где $1 < p \leqslant 2$, $p' \leqslant q$;

б) $$\left(\|u+v\|^{p'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{p'}_{p,q,s} \right)^{1/p'} \leqslant 2^{1/p'} \left(\|u\|^{p}_{p,q,s} + \|v\|^{p}_{p,q,s} \right)^{1/p},$$
$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'})^{1/p'}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{p})^{1/p} - 1,$$

где $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant q \leqslant p'$;

в) $$\left(\|u+v\|^{q'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{q'}_{p,q,s} \right)^{1/q'} \leqslant 2^{1/q'} \left(\|u\|^{q}_{p,q,s} + \|v\|^{q}_{p,q,s} \right)^{1/q},$$
$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q'})^{1/q'}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q})^{1/q} - 1,$$

где $1 < p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant p$;

г) $$\left(\|u+v\|^q_{p,q,s} + \|u-v\|^q_{p,q,s} \right)^{1/q} \leqslant 2^{1/q} \left(\|u\|^{q'}_{p,q,s} + \|v\|^{q'}_{p,q,s} \right)^{1/q'},$$
$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q)^{1/q}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q'})^{1/q'} - 1,$$

где $2 \leqslant p < +\infty$, $p \leqslant q < +\infty$;

$$\text{д)}\quad \left(\|u+v\|^{p}_{p,q,s} + \|u-v\|^{p}_{p,q,s}\right)^{1/p} \leqslant 2^{1/p}\left(\|u\|^{p'}_{p,q,s} + \|v\|^{p'}_{p,q,s}\right)^{1/p'},$$
$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1-(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p})^{1/p}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{p'})^{1/p'}-1,$$

где $2 \leqslant p < +\infty$, $p' \leqslant q \leqslant p$;

$$\text{е)}\quad \left(\|u+v\|^{q'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{q'}_{p,q,s}\right)^{1/q'} \leqslant 2^{1/q'}\left(\|u\|^{q}_{p,q,s} + \|v\|^{q}_{p,q,s}\right)^{1/q},$$
$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1-(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q'})^{1/q'}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q})^{1/q}-1,$$

где $2 \leqslant p < +\infty$, $1 < q \leqslant p'$.

Следствие 1. *Пространство Бесова* $B^s_{p,\,q}(R^n)$ *является суперрефлексивным банаховым пространством.*

Определение 5 [7]. Константой Неймана–Джордана n-го порядка ($n \geqslant 2$) для банахова пространства X называется величина

$$C^{(n)}_{NJ}(X) = \sup\left\{\sum_{\theta_j=\pm1}\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j u_j\right\|^2_X}{2^n\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_X};\ \sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_X \neq 0,\ u_i \in X\right\}.$$

Какой будет константа Неймана – Джордана для суперрефлексивных пространств Бесова, например, при $1 < p \leqslant 2$, $p' \leqslant q$? (Остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично.)

Следствие 2. *При* $1 < p \leqslant 2$, $p' \leqslant q$ *имеет место*

$$C^{(n)}_{NJ}(B^s_{p,q}(R^n), \|\cdot\|_{p,q,s}) = n^{\frac{2}{q'}-1}.$$

При каждом $n \geqslant 2$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{\theta_j=\pm1}\|\theta_j u_j\|^2_{p,q,s} \leqslant 2^n \cdot n^{\frac{2}{q'}-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{p,q,s},$$

где $\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{p,q,s} \neq 0$, $u_i \in B^s_{p,q}(R^n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $|\cdot|_{p,q,s}$ — произвольная норма на $B^s_{p,q}(R^n)$, эквивалентная канонической норме $\|\cdot\|_{p,q,s}$. Зафиксируем $1 < p \leqslant 2-\Delta$, $p < q$ (остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично), где Δ – сколь угодно малое положительное число.

Следствие 3. *Существует константа* $D > 0$, *зависящая, вообще говоря, от параметров* n, p, q, s, Δ *и нормы* $|\cdot|_{p,q,s}$, *но не зависящая от* u *и* v *такая, что выполняется неравенство*

$$|\,u+v\,|^{p+\Delta}_{p,q,s} + D\,|u-v|^{p+\Delta}_{p,q,s} \leqslant (1+\Delta)\cdot 2^{p+\Delta-1}\left(|u|^{p+\Delta}_{p,q,s} + |v|^{p+\Delta}_{p,\,q,\,s}\right).$$

Список литературы

[1] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.

[2] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986.

[3] R. C. James, *Canad. J. Math.*, **24,**:5 (1972), 896–904.

[4] И. Кадец, "Геометрия банаховых пространств", Итоги науки и техники. Математический анализ, **13**, 1975.

[5] P. Enflo, *Israel J. Math*, **3** (1972), 281–288.

[6] R. P. Boas, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 304–311.

[7] M. Kato, Y. Takahashi, K. Hashimoto, *Bull Kyushu Inst. Tech. Pure Appl. Math,*, 1998, № 45, 25–33.