Связность строгих солнц в конечномерных банаховых пространствах

А. Р. Алимов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Для подмножества $M \neq \varnothing$ линейного нормированного или несимметрично нормированного пространства X точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если

$$y \in P_M\bigl((1-\lambda)y + \lambda x\bigr) \qquad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0,$$

где $P_M x$ – множество ближайших точек из M для x. Геометрически это условие означает, что из точки y исходит "солнечный" луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие $y \in P_M\bigl((1-\lambda)y+\lambda x\bigr)$ при всех $\lambda \geqslant 0$ выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Замкнутое непустое множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно, *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M. Понятие солнца было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1958 г. при изучении изучении чебышёвских множеств.

Следуя Л. П. Власову, если Q обозначает некоторое свойство (например, "связность"), мы будем говорить, что множество M обладает свойством

B-Q, если $M \cap B(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;
$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

здесь $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ – замкнутый и открытый шар с центром x и радиусом r.

В. А. Кощеев показал, что в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое солнце связно. А. Л. Браун установил, что солнце в конечномерном линейном нормированном пространстве линейно связно и локально линейно связно. Кощеев также установил, что в линейном нормированном пространстве компактное солнце связно, а строгое солнце не имеет собственных связных компонент, являющихся множествами существования. Он также построил пример несвязного солнца (в конкретном бесконечномерном пространстве). Также отметим, что ограниченно компактное строгое солнце в нормированном пространстве B-связно (B-линейно связно, если пространство банахово), а в пространстве Ефимова–Стечкина всякое строгое солнце $\mathring{B}$-связно.

Изучая солнца в конечномерных пространствах Х. Беренс и Л. Хетцельт охарактеризовали солнца в пространствах $\ell^\infty(n)$ и показали, используя эту характеризацию, что солнца в $\ell^\infty(n)$ B-клеточноподобны (являются B-R_δ-множествами по Ароншайну). А. Л. Браун установил связность по Менгеру солнц в так называемых (BM)-пространствах конечной размерности – полиэдральные (BM)-пространства суть в точности $\oplus_\infty$-прямые суммы 1- или 2-мерных пространств. Используя этот результат, автор установил, что в конечномерных (BM)-пространствах любое солнце B-стягиваемо и на него для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная аддитивная (мультипликативная) ε-выборка (непрерывная выборка из почти наилучшего ε-приближения). Отметим, что непрерывной выборки из метрической проекции (т.е. 0-выборки) на строгое солнце может не существовать даже в трехмерном случае.

Теорема. *Пусть* X – *линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство размерности* 2 *или* 3 *и пусть* $M \subset X$ – *строгое солнце. Тогда* M B-*стягиваемо и на него для любого* $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная аддитивная* (*мультипликативная*) ε-*выборка.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00022).