О разрешимости начально-краевой задачи сложного теплообмена с краевыми условиями диффузного отражения и преломления для излучения

А. А. Амосов

Национальный исследовательский университет "Московский энергетический институт"

Рассматривается начально-краевая задача

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(x,u)\nabla u) + 4\pi \int\limits_0^\infty \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u)\, d\nu$$

$$= \int\limits_0^\infty \varkappa_\nu \int\limits_\Omega I_\nu \, d\omega \, d\nu + f, \qquad (x,t) \in G \times (0,T), \tag{1}$$

$$\omega \cdot \nabla I + (\varkappa_\nu + s_\nu) I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u), \qquad (\omega,x,t) \in \Omega \times G \times (0,T), \tag{2}$$

$$\lambda(x,u)\nabla u \cdot n = 0, \qquad (x,t) \in \partial G \times (0,T), \tag{3}$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}), \qquad (\omega,x,t) \in \Gamma^- \times (0,T), \quad 0 < \nu < \infty, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u^0, \qquad x \in G, \tag{5}$$

описывающая радиационно – кондуктивный теплообмен в системе $G = \bigcup\limits_{j=1}^m G_j$, состоящей из полупрозрачных тел $G_j \subset \mathbb{R}^3$, разделенных вакуумом. Искомые функции $u(x,t)$, $I_\nu(\omega,x,t)$ имеют физический смысл абсолютной температуры и интенсивности излучения на частоте ν, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid |\omega| = 1\}$.

Здесь $0 < c_p$, $0 < \lambda(x,u)$, $0 \leqslant \varkappa_\nu$, $0 \leqslant s_\nu$ и $1 < k_\nu$ – коэффициенты теплоемкости, теплопроводности, поглощения, рассеяния и показатель преломления. Функция $h_\nu(u)$ отвечает спектральному распределению Планка: $h_\nu(u) = \dfrac{2\nu^2}{c_0^2} \dfrac{\hbar\nu}{\exp(\hbar\nu/(ku)) - 1}$ при $u > 0$. В уравнении переноса излучения (2) $\mathcal{S}_\nu$ – оператор рассеяния:

$$\mathcal{S}_\nu(\varphi)(\omega,x) = \int\limits_\Omega \theta_{j,\nu}(\omega' \cdot \omega)\varphi(\omega',x)\, d\omega', \quad (\omega,x) \in \Omega \times G_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Краевое условие (4) описывает диффузное отражение и диффузное преломление излучения на границах тел. В нем $\Gamma^- = \{(\omega,x) \in \Omega \times \partial G \mid \omega \cdot n(x) < 0\}$, $\Gamma^+ = \{(\omega,x) \in \Omega \times \partial G \mid \omega \cdot n(x) > 0\}$. Подробное описание условия (4) и доказательство однозначной разрешимости задачи (2), (4) даны в [1], [2].

В данной работе доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(5). Установлена теорема сравнения. Приведены достаточные условия регулярности обобщенного решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-01-00201) и в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект N 1553).

Список литературы

[1] A. A. Amosov, "Boundary value problem for the radiation transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions", *Journal of Mathematical Sciences* (*United States*), **193**:2 (2013), 151–176.

[2] A. A. Amosov, "Some Properties of Boundary Value Problem for Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions", *Journal of Mathematical Sciences* (*United States*), **207**:5 (2013), 118–141.