Неравенства Винера — Ингама для лакунарных тригонометрических рядов

А. Г. Бабенко[a], В. А. Юдин

[a] *Институт математики и механики Уральского отделения РАН*

Тема, рассматриваемая в докладе, впервые появилась в исследованиях Н. Винера (1934) и существенно была развита А.Е. Ингамом (1936) и А. Сельбергом (1974).

Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ — период длины 2π, $L^2 = L^2(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических измеримых комплекснозначных функций с обычной нормой $\|f\| = \|f\|_{L^2}$. Для натурального числа $q \geqslant 2$ обозначим через D_q класс функций из L^2 с рядами Фурье вида

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_{\nu_k} e^{i\nu_k x}, \quad \text{все} \quad \nu_k \in \mathbb{Z}, \quad \nu_{k+1} - \nu_k \geqslant q.$$

Зафиксируем $h \in (0, \pi)$. Нас интересует в каких пределах может изменяться отношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \Bigg/ \int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx$$

для $f \in D_q$? Здесь анонсируются оценки этого отношения в терминах величин

$$\mathcal{E}_n^+(h) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\,\chi_h\leqslant\tau} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \{\tau(x) - \chi_h(x)\}\,dx,$$

$$\mathcal{E}_n^-(h) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\,\tau\leqslant\chi_h} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \{\chi_h(x) - \tau(x)\}\,dx$$

наилучшего интегрального приближения соответственно сверху и снизу характеристической функции χ_h интервала $(-h, h)$ подпространством $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка не выше n; неравенство $\chi_h \leqslant \tau$ означает, что $\chi_h(x) \leqslant \tau(x)$ при всех $x \in \mathbb{T}$.

Теорема. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, $\pi/q < h \leqslant \pi$, $f \in D_q$. *Тогда*

$$\frac{1}{\frac{h}{\pi} + \mathcal{E}_{q-1}^+(h)} \leqslant \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}{\displaystyle\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx} \leqslant \frac{1}{\frac{h}{\pi} - \mathcal{E}_{q-1}^-(h)}.$$

Заметим, что $\mathcal{E}_n^+(h) = \mathcal{E}_n^-(\pi - h)$ для $n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi)$; поэтому достаточно исследовать лишь одну из этих величин. Дж.Д. Ваалер (1985) доказал, что величина $\mathcal{E}_n^-(h)$ не превосходит $1/(n+1)$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi]$. Точное значение этой величины было найдено совместно авторами и Ю.В. Крякиным (2012), с помощью этого результата и теоремы получаем

Следствие. *Пусть* $q \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, $h = \frac{\pi+\varepsilon}{q}$, $0 < \varepsilon < \pi$, $f \in D_q$. *Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \left(q + \operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{ctg}\frac{h}{2}\right) \int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx.$$

Положим

$$\alpha_q(h) := \sup_{f\in D_q,\, \|f\|>0} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}{\displaystyle\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx}.$$

Справедливы равенства

$$\lim_{h\to\frac{2\pi}{q}-0} \alpha_q(h) = q, \qquad \lim_{h\to\frac{2\pi}{q+1}-0} \alpha_q(h) = q+1.$$

Из первого равенства следует, что $\alpha_2(h)$ терпит разрыв в точке $h=\pi$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00702).

Список литературы

[1] Wiener N., “A class of gap theorems”, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, *Classe di Scienze* 2^e *série*, **3**:3-4 (1934), 367–372.

[2] Ingham A.E., “Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series”, *Math. Z.*, **41**:1 (1936), 367–379.

[3] Selberg A., *Collected papers*, Volume II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, viii+253 с.

[4] Vaaler J.D., “Some extremal functions in Fourier analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.* (*New Series*), **12**:2 (1985), 183–216.

[5] Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А., “Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **18**:1 (2012), 82–95.