Минимальное идеальное пространство для конуса обобщенно двояко монотонных функций

Э. Г. Бахтигареева

Российский университет дружбы народов

Пусть $T_0 \in (0, \infty]$, M – множество вещественнозначных измеримых функций, $M_+ = \{f \in M : f \geqslant 0\}$.

Теорема. *Пусть $Y = Y(0, T_0)$ есть идеальное пространство (ИП), порожденное идеальной квазинормой (ИКН) ρ, причем ρ согласована со следующим отношением порядка: для $f, g \in M_+(0, T_0)$*

$$\int_0^t f d\tau \leqslant \int_0^t g d\tau \Rightarrow \rho(f) \leqslant \rho(g). \tag{1}$$

Фиксируем $\beta \in (0, 1)$ и введем конус

$$K_0 = \left\{ h \in Y : h \geqslant 0; \quad t^{-1} \int_0^t h d\tau \downarrow, \quad t^{-\beta} \int_0^t h d\tau \uparrow \right\}, \tag{2}$$

снабженный функционалом ρ:

$$\rho_{K_0}(h) = \rho(h), \quad h \in K_0. \tag{3}$$

Для $f \in M_+(0, T_0)$ введем функционал $\rho_0(f) = \rho(A_0 f)$, где оператор $A_0 : M \to M_+$ (норма по τ):

$$(A_0 f)(t) = \left\| \tau^{-\beta} (t + \tau)^{\beta - 1} \int_0^\tau |f| d\xi \right\|_{L_\infty(0, T_0)}, \quad t \in (0, T_0).$$

Тогда, ρ_0 есть ИКН, согласованная с отношением порядка (1), а порожденное ею пространство

$$X_0 = X_0(0, T_0) = \{f \in M(0, T_0) : \rho_0(|f|) < \infty\}$$

является оптимальным ИП с нормой, согласованной с отношением порядка (1), для вложения $K_0 \longmapsto X$.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00443).

Список литературы

[1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, New York, 1988.