Минимальное идеальное пространство, содержащее конус неотрицательных измеримых функций

Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман

Российский университет дружбы народов

1. *Пусть* (A,μ) *– пространство с неотрицательной* σ *– конечной мерой* μ, M *– множество* μ *- измеримых функций*, $M_+ = \{f \in M : f \geqslant 0\}$. *Пусть* ρ *– идеальная квазинорма* (*кратко*: *ИКН*), $Y = Y(A,\mu)$*- порожденное ею идеальное пространство* (*ИП*, *см.* [1]); $A_0 : M \to M_+$*- оператор со следующими свойствами*:

$$A_0(|f|) = A_0 f; \quad A_0(\alpha f) = \alpha A_0 f, \quad f \in M, \alpha \geqslant 0;$$

$$(A1). \quad \exists c_1 \in \mathbb{R}_+ : \rho(f) \leqslant c_1 \rho(A_0 f), f \in M.$$

$$(A2). \quad \exists c_2 \in \mathbb{R}_+ : \quad \rho(A_0(f+g)) \leqslant c_2[\rho(A_0 f) + \rho(A_0 g)],$$

$$(A3). \quad |f| \leqslant |g| \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow \rho(A_0 f) \leqslant \rho(A_0 g), \quad f,g \in M;$$

$$(A4). \quad 0 \leqslant f_n \uparrow f \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow A_0 f_n \uparrow A_0 f \quad \mu\text{-п.в.}$$

Тогда, отображение $\rho_0(f) := \rho(A_0 f), \quad f \in M_+$, *есть ИКН, а порожденное ею ИП* $X_0 = X_0(A,\mu)$ *с* $\|f\|_{X_0} = \rho_0(|f|)$ *вложено в* Y.

2. *Пусть еще* $K_0 \subset Y_+ = \{g \in Y, \quad g \geqslant 0\}$ *-конус, снабженный функционалом* $\rho_{K_0} := \rho$, *и согласованный с оператором* A_0 *условиями*:

$$(A5). \quad \exists c_3 \in \mathbb{R}_+ : h \in K \Rightarrow \rho(A_0 h) \leqslant c_3 \rho(h); \quad (A6). \quad A_0(X_0) \subset K_0.$$

Тогда $X_0 = X_0(A,\mu)$ *есть минимальное ИП, содержащее* K_0, *среди всех ИП* $X = X(A,\mu)$, *обладающих свойством*: $K_0 \subset X$ *и*

$$\exists c_X \in \mathbb{R}_+ : \quad \|f\|_X \leqslant c_X \|A_0 f\|_X, \quad f \in M.$$

Этот результат влечет ряд конкретных конструкций минимальных ИП для различных конусов из M_+.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00443).

Список литературы

[1] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.