Оценка остаточного члена в асимптотическом решении одной экстремальной задачи на множестве неотрицательных тригонометрических полиномов

А. С. Белов

Ивановский государственный университет

Для всех вещественных чисел $\gamma \geqslant 1$ обозначим

$$K(\gamma) = \inf\Big\{ -\min_x \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) \Big\}, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем действительным $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким, что либо $\alpha_k = 0$, либо $\alpha_k \geqslant 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \gamma$. Величину (1) рассматривал Одлыжко [1], который показал, что $K(\gamma) = \mathrm{O}\left((\gamma \ln \gamma)^{1/4}\right)$ при $\gamma \to +\infty$.

Также при всех $\gamma \geqslant 1$ определим функцию

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \inf\Big\{ -\min_x \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) \Big\}, \tag{2}$$

где нижняя грань берется по всем действительным $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким, что либо $\alpha_k = 0$, либо $\alpha_k \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \gamma$ и $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \ldots$. Из этих определений ясно, что

$$K^{\downarrow}(\gamma) \geqslant K(\gamma) \geqslant 1 \qquad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1$$

и

$$K^{\downarrow}(\gamma) = K(\gamma) = \gamma \qquad \text{при} \quad \gamma \in [1, 2),$$

поскольку в этом случае и в сумме (1), и в сумме (2) будет только одно из $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ отлично от нуля и равно γ.

В 2003 году автор доказал, что существует положительная абсолютная постоянная C такая, что

$$C\,(1 + \ln \gamma) \leqslant K(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) \leqslant \frac{1}{\pi}\,(\ln \gamma + 2\pi - \ln 2) \qquad \text{при всех} \ \ \gamma \geqslant 1 \tag{3}$$

и

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln \gamma + O(\ln\ln(\gamma + 2)) \qquad \text{при} \ \ \gamma \geqslant 1. \tag{4}$$

Отметим, что в (3) оценка снизу для величины (1) вытекает из положительного решения гипотезы Литтлвуда Конягиным С.В. и Мак Геем, Пино и Смитом в 1981 году.

В 2004 году автор анонсировал оценку

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln \gamma + O(1) \qquad \text{при всех} \ \ \gamma \geqslant 1,$$

которая несколько улучшает оценку (4). Дальнейшее развитие и некоторое усложнение рассуждений позволило в [2] уточнить последнюю оценку. Оказывается, для величины (2) справедлива оценка

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln \gamma + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln \pi}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\,\frac{\ln \gamma}{\gamma} + \frac{O(1)}{\gamma} \qquad \text{при всех} \ \ \gamma \geqslant 1, \tag{5}$$

где через
$$C_0 = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \Big)$$
обозначена известная постоянная Эйлера. Из приводимого в статье [2] доказательства можно при желании получить в асимптотическом соотношении (5) конкретную оценку остаточного члена $O(1)$. Оказывается, верна следующая

Теорема 1. *Для величины* (2) *справедлива оценка*
$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln\gamma + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln\pi}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\,\frac{\ln\gamma}{\gamma} + \frac{\alpha(\gamma)}{\gamma} \qquad \textit{при всех}\ \ \gamma \geqslant 1\,,$$
где
$$0 < \alpha(\gamma) < C_1 = 4 - 2\,\pi^{-1}\,(C_0 + \ln(4\,\pi)) - \pi^{-2}\ln 2 = 1{,}95100252\ldots$$
при всех $\gamma \geqslant 1$ *и* C_0 *обозначает постоянную Эйлера.*

Более того, $\sup\{|\alpha(\gamma)| : \gamma \geqslant 1\} = C_1$,
$$\varlimsup_{\gamma\to\infty} \alpha(\gamma) \leqslant \pi^{-2}\,(16 + C_0 + \ln(2\,\pi)) = 1{,}8658389924\ldots$$
и $\alpha(\gamma) < 1{,}95$ *при всех* $\gamma \geqslant 2$.

В связи с теоремой 1 особый интерес представляет вопрос о взаимоотношении функций (1) и (2) : не известно ни одного значения γ , при котором функции (1) и (2) принимают различные значения.

Верна следующая теорема.

Теорема 2. *При всех* $\gamma \in [1, 3)$ *справедливо равенство* $K(\gamma) = K^{\downarrow}(\gamma)$.

В статье [2] найдено точное значение функции (2) при всех $\gamma \in [1, 6]$. Это может оказаться полезным при попытке найти такое γ , если, конечно, оно существует, при котором функции (1) и (2) принимают различные значения. Если существуют вещественное число $\gamma \geqslant 3$, натуральное $m \geqslant 2$, вещественные числа $a_k \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^{m} a_k = \gamma$ и натуральные числа $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_m$, для которых полином
$$T(x) = K^{\downarrow}(\gamma) + \sum_{k=1}^{m} a_k\,\cos(n_k\,x)$$
положителен во всех точках $x \in [0, \pi]$, то, очевидно, значения $K^{\downarrow}(\gamma)$ и $K(\gamma)$ различны. Поэтому детальное изучение функции (2) важно и для изучения функции (1).

Далее, для удобства изложения, положим
$$g(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln\gamma + \frac{1}{\pi^2}\,\frac{\ln\gamma}{\gamma} + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln\pi}{\pi} \qquad \text{при} \qquad \gamma \geqslant 1\,.$$
Тогда по теореме 1
$$K^{\downarrow}(\gamma) > g(\gamma) \qquad \text{при всех} \qquad \gamma \geqslant 1\,.$$

Пусть взяты произвольные натуральное число $m \geqslant 2$, вещественные числа $a_k \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, m$, и натуральные числа $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_m$. Рассмотрим при $\gamma = \sum_{k=1}^{m} a_k$ полином
$$T(x) = g(\gamma) + \sum_{k=1}^{m} a_k\,\cos(n_k x)\,. \tag{6}$$

Если бы нашелся неотрицательный полином такого вида, то величина $K(\gamma)$ не превосходила бы $g(\gamma)$ и, значит, была бы меньше величины $K^{\downarrow}(\gamma)$, т.е. значения $K(\gamma)$ и $K^{\downarrow}(\gamma)$ не совпадали бы. Однако найти неотрицательный полином вида (6) не удается. Доказать, что любой полином вида (6) отрицателен в некоторой точке x, своей для каждого полинома, также пока не удается.

Доказательство теоремы 1 основано на изучении (см. [3]) экстремальной задачи о минимуме свободного члена неотрицательного четного тригонометрического полинома при некоторых условиях на коэффициенты.

Список литературы

[1] Odlyzko A.M., “Minima of cosine sums and maxima of polynomials on the unit circle”, *J. London Math. Soc.*, **26**:3 (1982), 412–420.

[2] Белов А.С., “Об асимптотическом решении одной экстремальной задачи, связанной с неотрицательными тригонометрическими полиномами”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **18**:5 (2013), 27–67.

[3] Белов А.С., “Об экстремальной задаче о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **17**:3 (2011), 105–121.