Пространства мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов: эквивалентные нормы и характеризация в шкале пространств $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$

А. А. Беляев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

В работе исследуются мультипликаторы из пространства бесселевых потенциалов $H^k_p(\mathbb{R}^n)$ с положительным индексом гладкости в пространство бесселевых потенциалов $H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ с отрицательным индексом гладкости и возможность описания пространств мультипликаторов $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ в шкале равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Несложно показать, что для произвольных $k, l \geqslant 0,\ p, q > 1$ имеет место непрерывное вложение

$$M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)) \subset H^{-l}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-k}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство же обратного вложения возможно лишь при выполнении дополнительных ограничений на индексы k, l, p, q. В случае $p \leqslant q'$ на пространстве мультипликаторов $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ можно ввести равномерную мультипликаторную норму, эквивалентную стандартной норме этого пространства. В этом случае, опираясь на методы, развитые в работах [1] и [2], автором в статье [3] получен критерий вложения пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ в терминах выполнения функциональных мультипликативных оценок.

С помощью этого подхода автором получено описание пространства мультипликаторов в следующем важном частном случае.

Теорема. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ и $k > \frac{n}{\max(p,q)}$. Тогда*

$$M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-k}_{q'}(\mathbb{R}^n)) = H^{-k}_{\max(p',\,q'),\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причем соответствующие нормы эквивалентны.

Накладываемые в условии этой теоремы ограничения являются естественными. Действительно, в случае $p > q'$ непрерывное вложение

$$H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$$

не имеет места ни при каких значениях $\gamma \in \mathbb{R},\ p > 1$. Поэтому задача описания пространства мультипликаторов из $H^k_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов имеет смысл лишь при $p \leqslant q'$.

При отказе от условия $k > \frac{n}{\max(p,q)}$ дать полную характеризацию пространства мультипликаторов $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ в шкале пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ невозможно даже в простейшем случае $k = l, p = q = 2$. В этом случае в работе [2] при $k < \frac{n}{2}$ были установлены двусторонние непрерывные вложения

$$H^{-k}_{\frac{n}{k},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M(H^k_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-k}_2(\mathbb{R}^n)) \subset H^{-k}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

В докладе будут рассмотрены обобщения этого результата для пространства

$$M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-k}_{q'}(\mathbb{R}^n))$$

при $k < \frac{n}{\max(p,q)}$.

Список литературы

[1] Дж. Г. Бак, А. А. Шкаликов, "Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями", *Матем. заметки*, **71** **5** (2002), 643–651.

[2] M. I. Neiman-Zade, A. A. Shkalikov, "Strongly Elliptic Operators With Singular Coefficients", *Russian Journal Of Mathematical Physics*, **13** **1** (2006), 70–78.

[3] A. A. Belyaev, "Characterization of Spaces of Multipliers for Bessel Potential Spaces", *Math. Notes*, **96** **5** (2014), 634–646.