О структуре множества сходимости равномерно ограниченной последовательности полиномов

В. А. Беляев

Калужский филиал Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана

Проблема состоит в следующем: описать структуру множества E, принадлежащего компакту K комплексной плоскости, для которого существует последовательность полиномов, равномерно ограниченная на K, сходящаяся поточечно на E и расходящаяся вне E. Компакт K не разбивает комплексной плоскости в том смысле, что $\mathbb{C} \setminus K$ состоит из одной области, содержащей бесконечно удаленную точку.

Рассматриваемая проблема примыкает к проблеме П. М. Монтеля о харрактеристике иррегулярных точек и описания функций, представимых сходящейся последовательностью полиномов. Некоторые результаты в этом направлении получены М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем, С. Н. Мергеляном, С. В. Колесниковым, В. А. Беляевым (см., например, [1]–[6]).

Введем некоторые обозначения: ∂K - граница K, $O\left(\partial K\right)$ – совокупность ограниченных, связных составляющих $\mathbb{C} \setminus \partial K$. Через $\{B\}$ обозначим совокупность всех тех областей из $O\left(\partial K\right)$, каждая из которых полностью принадлежит E, а $\{G\} = O\left(\partial K\right) \setminus \{B\}$.

Теорема. *Для того, чтобы существовала последовательность полиномов равномерно ограниченная на K, которая поточечно сходится на E, $E \subset K$, и расходится в каждой точке $\mathbb{C} \setminus E$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *E – типа $F_{\sigma\delta}$*
2. *$\omega\left(E \cap \partial G_m, G_m, z\right) = 0, \forall G_m \in \{G\}$, где $\omega\left(E \cap \partial G_m, G_m, z\right)$ - гармоническая мера*
3. *$\sum\left(1 - \left|\varphi\left(z_n\right)\right|\right) < \infty, \forall G_m \in \{G\}$ где $w = \varphi_m\left(z\right)$ конформное и однолистное отображение области G_m на круг $|w| < 1$, а суммирование берется по всем точкам множества $E \cap G_m$.*

Следствие. *Пусть $\mathring{K} \subset E \subset K$, где $\mathring{K}$ – множество внутренних точек K. Для того, чтобы существовала последовательность полиномов, равномерно ограниченная на K, которая поточечно сходится на E и расходится в каждой точке $\mathbb{C} \setminus E$, необходимо и достаточно, чтобы E имело тип $F_{\sigma\delta}$.*

Список литературы

[1] P. M. Montel, “Lecons sur les series de polinomes d’une variable complexe”, *Collect. Borel*, **1** (1910), 1–128.

[2] M. A. Lavrentieff, “Sur les fonctions d’une variable complexe representatles par des series de polinomes”, *Actual. sci. et. industr.*, **441** (1936), 1–62.

[3] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Гостехиздат, Москва, 1952.

[4] С. Н. Мергелян, “О некоторых классах множеств и их приложениях”, *Некоторые проблемы математики и механики*, 1961, 133–172.

[5] С. Н. Мергелян, А. А. Даниелян, “О последовательностях полиномов, сходящихся на множествах типа F_σ”, *ДАН Арм ССР*, 1988, 54–56.

[6] В. А. Беляев, “Описание структуры множества полиномиальной сходимости в комплексной плоскости”, *ДАН АНСССР*, 1990, 1296–1298.