О необходимом условии ступенчатой функции, порождающей ортогональный КМА на группе Виленкина

Г. С. Бердников

Саратовский государственный университет

Пусть p – простое число. Мы рассматриваем кратномасштабный анализ на локально-компактных группах Виленкина

$$\mathfrak{G} = \{x = (\dots, 0, 0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots) | \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x_i = \overline{0, p-1}, x_n \neq 0\}.$$

На группе определена операция покоординатного сложения по модулю p и она может быть представлена в виде $\mathfrak{G} = \bigcup_n \mathfrak{G}_n$, где

$$\mathfrak{G}_n = \{x = (\dots, 0, 0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots) | n \in \mathbb{Z}, \forall x_i = \overline{0, p-1}, x_n \neq 0\},$$

и выполняется вложение

$$\dots \supset \mathfrak{G}_{-n} \supset \dots \supset \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{G}_n \supset \dots$$

Также мы рассматриваем аннуляторы $\mathfrak{G}_n^{\perp}$ – множества характеров, обращающих группы $\mathfrak{G}_n$ в единицу.

Для построения кратномасштабного анализа на $\L_2(\mathfrak{G})$ необходимо найти масштабирующую функцию $\varphi(x)$, которая является решением масштабирующего уравнения. для преобразования Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ которой выполняется условие

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

где A – оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской.

Ю. Фарков [2] нашел необходимые и достаточные условия на масштабирующую функцию, при которых она порождает кратномасштабный анализ на группах Виленкина. Но в его работах нет алгоритма построения такой масштабирующей функции. В данной работе исследование этого вопроса ведется в терминах, пригодных для создания такого алгоритма.

Мы будем рассматривать функции $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$, то есть постоянные на смежных классах вида $G_{-N}^{\perp}\zeta$ и с компактным носителем $supp(\hat{\varphi}(\chi)) \subset \mathfrak{G}_M^{\perp}$.

Тогда возможно сформулировать необходимое условие для такой функции, порождающей ортогональный КМА на группе Виленкина, выраженное в терминах теории графов.

В работе [1] было выяснено, что маска $m_0(\chi)$ такой функции обладает следующими свойствами:

1) $m_0(\chi)$ постоянна на смежных классах вида $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta$.

2) $m_0(\chi)$ периодична с любым периодом $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \dots r_s^{\alpha_s}$, где $\alpha_i = \overline{0, p-1}$.

3) $m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}) = 1$.

Укажем способ построения ориентированного графа по масштабирующей функции.

Алгоритм.

1) Пусть вершины графа имеют вид $\overline{\alpha}^j = (\alpha_i^j)_{i=1}^N$. Множество всех вершин графа будем обозначать $\{\overline{\alpha}^j\}$.

2) Пусть $\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) \neq 0$, где $s \leqslant M$. Это условие, пользуясь равенством

$$\hat\varphi(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n}),$$

периодичностью маски и переобозначением

$$m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0}) = \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\dots,\alpha_0},$$

можно переписать в виде:

$$\hat\varphi(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) = \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\dots,\alpha_0} \lambda_{\alpha_{-N+1},\alpha_{-N+2},\dots,\alpha_1} \dots$$

$$\dots \lambda_{\alpha_{s-N-1},\alpha_{s-N},\dots,\alpha_{s-1}} \lambda_{\alpha_{s-N},\alpha_{s-N+1},\dots,\alpha_{s-1},0} \dots \lambda_{\alpha_{s-1},0,\dots,0} \neq 0.$$

Неравенство нулю выполняется только в том случае, если все значения маски $\lambda_{\alpha_{i-N},\dots,\alpha_i}$, участвующие в данном произведении, отличны от нуля. Для каждого такого λ мы строим дугу

$$(\alpha_{i-N}, \alpha_{i-N+1} \dots, \alpha_{i-1}) \to (\alpha_{i-N+1}, \alpha_{i-N+2}, \dots, \alpha_i).$$

3) Перебирая все смежные классы, на которых преобразование Фурье $\hat\varphi(\chi)$ отлично от нуля и производя аналогичные операции, мы получаем орграф Γ, в котором каждая дуга соответствует ненулевому значению маски.

Теорема. *Пусть $\varphi(x)$ – масштабирующая функция, причем $\hat\varphi(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$. Тогда орграф Γ, построенный по алгоритму 1, обладает следующими свойствами*:

1) *Если имеется дуга $\overline{\alpha}^j \to \overline{\alpha}^k$, это означает, что $N-1$ последняя компонента $\overline{\alpha}^j$ совпадает с первыми $N-1$ компонентами $\overline{\alpha}^k$. Иными словами $\forall i = \overline{1, N-1},\ \alpha_{i+1}^j = \alpha_i^k$.*

2) *Из любой вершины орграфа, отличной от $\overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$, есть путь в вершину $\overline{0}$.*

3) *Граф не содержит контуров, то есть замкнутых путей.*

4) *Из вершины $\overline{0}$ не исходит дуг.*

Список литературы

[1] Lukomskii S.F., “Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups”, *JFAA*, **20**:1 (2014), 42–65.

[2] Фарков Ю.А., “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп.”, *Матем. заметки*, 2007, 934–952.