

Локальные пространства Морри

Е. И. Бережной

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

Пусть X идеальное пространство функций на R^n , L идеальное пространство на R_+ , l идеальное пространство последовательностей: $x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i e^i$, где e^i , ($i \in Z$) стандартный базис в пространстве последовательностей, символом $\|x|X\|$ будем обозначать норму элемента $x \in X$. Зафиксируем множество $U \subset R^n$, для которого $0 \in U$, $\mu(U) > 0$, $\chi(U)$ его характеристическая функция. Через $U(r)$ будем обозначать растяжение U в r раз ($r > 0$).

Пространство Морри $M_{L,X}$ состоит из тех $f \in L^{1,loc}(R^n)$, для которых конечна норма

$$\|f|M_{L,X}\| = \|\|f(\cdot)\chi(U(r), \cdot)|X\||L\|$$

(внешняя норма вычисляется по переменной r).

Зафиксируем монотонную последовательность радиусов $\tau = \{r_i\}_{-\infty}^{\infty}$ такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = \infty$, $\lim_{i \rightarrow -\infty} r_i = 0$.

Пространство $M_{l,X}^{\tau}$ состоит из тех $f \in L^{1,loc}(R^n)$, для которых конечна норма

$$\|f|M_{l,X}^{\tau}\| = \left\| \sum_{-\infty}^{\infty} e^i \|f(\cdot)\chi(U(r_i) \setminus U(r_{i-1}))|X\||l\| \right\|.$$

Опишем дуальное пространство для пространства $M_{l,X}^{\tau}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задано пространство $M_{l,X}^{\tau}$. Тогда справедливо равенство

$$\{M_{l,X}^{\tau}\}' = M_{l',X'}^{\tau},$$

причем дуальная норма совпадает с нормой в пространстве $M_{l',X'}^{\tau}$.

Обратимся теперь к проблеме описания интерполяционных пространств для пространств $M_{l,X}^{\tau}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана интерполяционная пара пространств $(M_{l_0,X_0}^{\tau}, M_{l_1,X_1}^{\tau})$. Пусть F – интерполяционный функтор.

Тогда справедливо равенство

$$F(M_{l_0,X_0}^{\tau}, M_{l_1,X_1}^{\tau}) = M_{F(l_0(X_0), l_1(X_1))}^{\tau},$$

причем нормы в этих пространствах совпадают.

Заметим, что для звездных относительно нуля множеств U при некоторых условиях на L для пространства Морри $M_{L,X}$ можно найти пространство $M_{l,X}^{\tau}$ такое, что $M_{L,X}$ и $M_{l,X}^{\tau}$ естественно изоморфны. Поэтому переход от $M_{L,X}$ к $M_{l,X}^{\tau}$ дает новый подход даже для исследования классических пространств Морри.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 14-01-00417